

Sinkronisasi Sistem *Chaos* Dengan Pembangkit *Skew Tent Map*

Aris Alfian¹, Yusuf Fuad²

Jurusan Matematika, Universitas Negeri Surabaya, Surabaya¹
aa.aris@yahoo.com

Jurusan Matematika, Universitas Negeri Surabaya, Surabaya²
yfuadunesa@yahoo.com

Abstrak

Chaos merupakan suatu keadaan yang acak, tidak teratur dan dinamis. Sifat *Chaos* juga dapat dijumpai pada suatu sistem misalnya sensitif terhadap kondisi awal dimana sifat tersebut menyebabkan sulitnya memprediksi keadaan sistem setelah beberapa kali iterasi. Untuk mengatasinya, perlu dilakukan sinkronisasi sistem *chaos*. Makalah ini membahas sinkronisasi sistem *chaos* yang dibangkitkan *skew tent map* dari dua nilai awal berbeda dengan pemasangan peta. Dari pemasangan tersebut, akan dicari parameter δ dan ε yang menyebabkan pasangan tersebut sinkron. Selanjutnya, dibahas kestabilan dari hasil sinkronisasi sistem yang dibangkitkan *skew tent map* menggunakan nilai Lyapunov eksponen untuk mengetahui apakah sinkronisasi terjadi secara permanen atau tidak. Hasil sinkronisasi dikatakan stabil jika Lyapunov eksponennya bernilai negatif. Pada makalah ini dibahas bagaimana menemukan pasangan parameter δ dan ε tersebut sehingga diperoleh hasil sinkronisasi yang stabil. Selain itu, juga dibahas sinkronisasi yang menjadikan salah satu solusi mendekati solusi yang lain dengan menetapkan salah satu parameter sama dengan nol.

Kata kunci: Sistem *chaos*, *skew tent map*, sinkronisasi, Lyapunov eksponen, kestabilan.

1. Pendahuluan

Sistem *chaos* merupakan sistem dinamik yang terlihat mustahil untuk disinkronkan. Sifat sensitif terhadap kondisi awal yang dimilikinya menyebabkan perbedaan yang sangat besar meskipun dengan sedikit perbedaan pada nilai awal yang diberikan. Secara umum, sistem *chaos* memiliki ciri-ciri: sensitif terhadap nilai awal, tidak periodik dan memiliki orbit yang padat [5].

Ide sinkronisasi sistem *chaos* pertama diperkenalkan pertama oleh Yamada dan Fujisaka pada tahun 1983 kemudian oleh Afraimovich pada tahun 1986. Setelah Pecora dan Carroll memperkenalkan metode sinkronisasi yang biasa disebut *master-slave configuration* pada tahun 1990, bahasan sinkronisasi sistem *chaos* menjadi sangat menarik bagi kalangan matematikawan, fisikawan bahkan teknisi.

Pada saat ini *chaos* dan sinkronisasinya telah banyak diterapkan dalam bidang sains, fisika maupun teknik mengingat banyaknya fenomena yang bersifat *chaos*. Beberapa contoh terapannya adalah pembuatan pesan rahasia (kriptografi), reaksi kimia, pengkonversi power, sistem pertumbuhan populasi hewan, proses informasi dan lain sebagainya.

Dalam menyelesaikan tulisan ini, penulis menggunakan metode studi literatur dengan mengambil dari berbagai sumber misal website internet, buku, serta jurnal-jurnal ilmiah. Selain itu, penulis juga mensimulasikan teori dengan menggunakan software Maple 13[®].

Pada bagian kedua akan dibahas mengenai sistem yang dibangkitkan oleh *skew tent map* beserta sifat-sifat *chaos* pada sistem tersebut. Pada bagian ketiga dibahas mengenai Lyapunov eksponen dan perhitungan Lyapunov eksponen pasangan *skew tent map*. Dibagian akhir dibahas sinkronisasi dan kestabilan sinkronisasi yang kemudian di tutup dengan kesimpulan.

2. *Skew tent map* dan Sistem Dinamik yang dibangkitkannya

Skew tent map atau peta tenda miring merupakan suatu fungsi linier sepotong-sepotong yang memetakan dari $[0,1]$ ke $[0,1]$ dengan bagian linier pada $[0, \frac{1}{a}]$ dan $(\frac{1}{a}, 1]$. Salah satu contoh yang akan kita bahas dalam makalah ini berbentuk:

$$f(x) = \begin{cases} ax, & 0 \leq x \leq \frac{1}{a} \\ \frac{a(1-x)}{a-1}, & \frac{1}{a} < x \leq 1 \end{cases}$$

dengan $a > 1$.

Skew tent map juga dapat dibangkitkan menjadi sistem dinamik diskrit yang dapat ditulis:

$$x_{t+1} = f(x_t) \quad (2.1)$$

dengan

$$f(x_t) = \begin{cases} ax_t, & 0 \leq x_t \leq \frac{1}{a} \\ \frac{a(1-x_t)}{a-1}, & \frac{1}{a} < x_t \leq 1 \end{cases} ; a > 1 \text{ dan } t = 0, 1, 2, \dots$$

Dari persamaan (2.1) dan dengan memilih $x_0 \in [0,1]$, akan diperoleh barisan

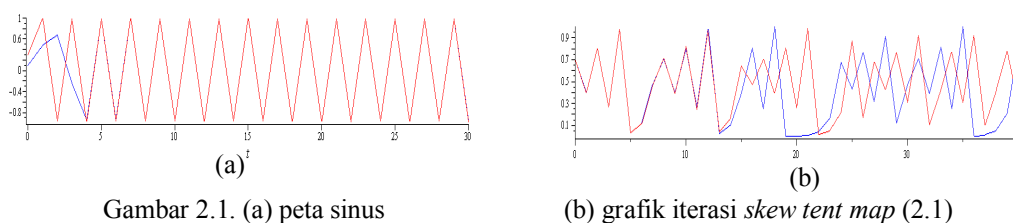
$$x_0, f(x_0), f(f(x_0)), f(f(f(x_0))), \dots$$

atau dapat ditulis sebagai barisan $x_0, x_1, x_2, x_3, \dots$ yang biasa disebut orbit atau trayektori.

Berikut akan ditunjukkan bahwa sistem yang dibangkitkan *skew tent map* memenuhi sifat *chaos*.

2.1. Sensitif terhadap nilai awal

Artinya jika diberikan dua nilai awal yang memiliki selisih sangat kecil pada suatu sistem *chaos* maka seiring dengan perubahan waktu atau iterasi akan menunjukkan nilai yang sangat berbeda. Oleh karena itu, perubahan sistem akibat gangguan kecil saja menjadi sangat berarti. Para ilmuwan mengenal dengan sebutan efek kupu-kupu (*butterfly effect*) yang berbunyi "Akibat kepakakan sayap kupu-kupu di Brazil dapat menyebabkan badai besar di Texas." Sebagai ilustrasi dapat dilihat gambar 2.1.

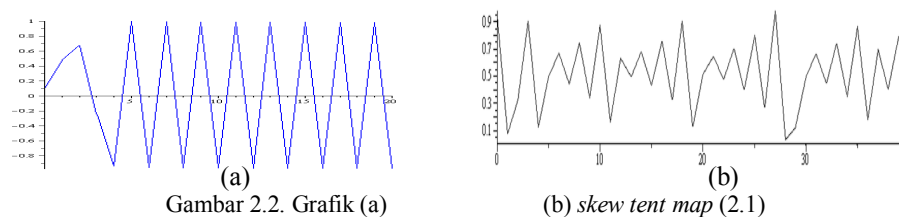


2.2. Tidak periodik

Pada umumnya suatu fungsi dinamik memiliki bentuk grafik yang periodik. Artinya, terjadi perulangan nilai setelah selang waktu tertentu secara teratur. Sedangkan pada sistem yang dibangkitkan *skew tent map*, tidak terjadi keperiodikan nilai tersebut.

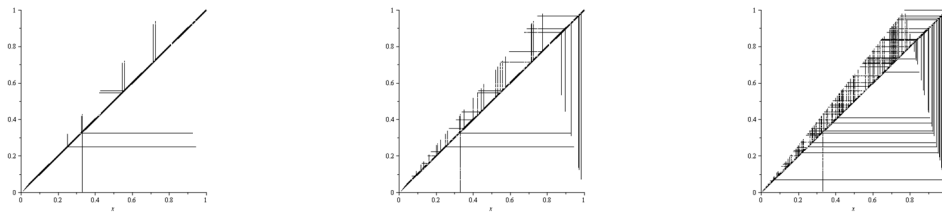
Contoh:

Diberikan dua peta diskrit dan sistem *skew tent map* (2.1) maka dapat diperoleh grafik gambar 2.2. Grafik pada gambar 2.2 (a) merupakan peta yang periodik sedangkan 2.2 (b) tidak periodik.



2.3. Orbit Yang Padat

Pada beberapa refensi disebutkan sifat ketiga dari *chaos* ini merupakan akibat dari sifat kedua yaitu orbit yang tidak periodik. Gambar 2.3 (a) menunjukkan 10 kali iterasi *skew tent map* 2.3 dengan parameter dan nilai awal yang tidak padat. Jika iterasi dilakukan terus menerus akan menghasilkan orbit yang semakin padat seperti ditunjukkan pada gambar 2.3 (b) dan 2.3 (c).



Gambar 2.3. Grafik iterasi titik tetap *skew tent map* dengan 10, 40 dan 100 kali iterasi

Karena memenuhi ketiga sifat dari *chaos*, maka dapat dikatakan bahwa sistem tersebut bersifat *chaos* kecuali pada sebanyak berhingga titik.

Untuk mensinkronkan sistem yang dibangkitkan *skew tent map* dari dua nilai awal berbeda, kita perlu memasang peta tersebut. Beberapa contoh pemasangan peta telah dijelaskan dalam tulisan milik *kuznetsov*. Dari beberapa contoh pemasangan dua peta tersebut, yang sesuai dengan prinsip sinkronisasi adalah:

dengan menyatakan sistem yang dibangkitkan *skew tent map*, merupakan parameter dan

3. Lyapunov Eksponen

Lyapunov eksponen untuk fungsi dimensi satu didefinisikan,

Definisi 3.1

Diberikan fungsi . Lyapunov eksponen pada iterasi ke- k () dari didefinisikan

—

dengan menyatakan turunan pertama dari di titik dan jika ekspresi dalam kurung dapat ditentukan dan limitnya ada.

Bilangan λ berfungsi untuk membedakan berbagai tipe dari orbit suatu peta baik diskrit maupun kontinu. $\lambda > 0$ menunjukkan selisih antara dua nilai awal tumbuh secara eksponensial dan acak, berarti peta tersebut sensitif terhadap nilai awal. $\lambda = 0$ berarti selisih antara dua nilai awal tetap dalam hal ini dapat dikatakan peta dalam keadaan netral. $\lambda < 0$ menunjukkan peta dengan dua nilai awal yang berbeda itu saling tertarik satu sama lain atau dapat dikatakan konvergen secara asimtotik.

Teorema 3.1

Misal $f: [0,1] \rightarrow [0,1]$ adalah fungsi kontinu kecuali pada berhingga titik. Misal $\rho(x)$ adalah kepadatan peluang (pdf) dari fungsi tersebut. Untuk hampir semua kondisi awal, Lyapunov eksponen didefinisikan oleh definisi 3.1 ada dan memiliki nilai

$$\lambda^{(nat)} = \int_0^1 \ln|f'(x)|\rho(x) dx$$

dan selanjutnya disebut Lyapunov *eksponen natural* [3].

Untuk sistem yang dibangkitkan *skew tent map* pada definisi 2.1, $\lambda^{(nat)}$ diatas menjadi

$$\lambda^{(nat)} = \int_0^{\frac{1}{a}} \ln|a| dx + \int_{\frac{1}{a}}^1 \ln\left|\frac{a}{a-1}\right| dx = \frac{1}{a} \ln a + \left(1 - \frac{1}{a}\right) \ln \frac{a}{a-1} \quad (3.1)$$

Dari perhitungan sederhana dengan memilih $a=4$ dan $x_0 = 0.1$ diperoleh $\lambda^{(nat)} = 0,689$ yang menunjukkan bahwa sistem tersebut sensitif terhadap nilai awal. Pemasangan *skew tent map* pada persamaan 2.2 membawa pada peta dimensi dua yang memetakan $[0,1] \times [0,1] \rightarrow [0,1] \times [0,1]$. Karena *skew tent map* memiliki grafik yang tidak mulus, maka ada titik dimana tidak dapat ditemukan Lyapunov eksponennya. Untuk menjamin keberadaan Lyapunov eksponen tersebut, digunakan birrchoff ergodic theorem sehingga definisi dari Lyapunov eksponen dimensi N menjadi

$$\lambda^{(nat)} = \int_0^1 \ln|\mu(x)|\rho(x) dx$$

dengan $\mu(x)$ merupakan nilai eigen dari f . Dimana nilai eigen tersebut dapat dicari melalui matriks jacobian dari pasangan *skew tent map*. Dari persamaan tersebut diperoleh nilai Lyapunov ekponen natural

$$\lambda^{(nat)} = \ln|a| - \left(1 - \frac{1}{a}\right) \ln|a-1| + \ln|1 - (\delta + \varepsilon)|$$

Untuk nilai Lyapunov eksponen yang negatif maka,

$$\ln|a| - \left(1 - \frac{1}{a}\right) \ln|a-1| + \ln|1 - (\delta + \varepsilon)| < 0$$

Dengan perhitungan sederhana diperoleh

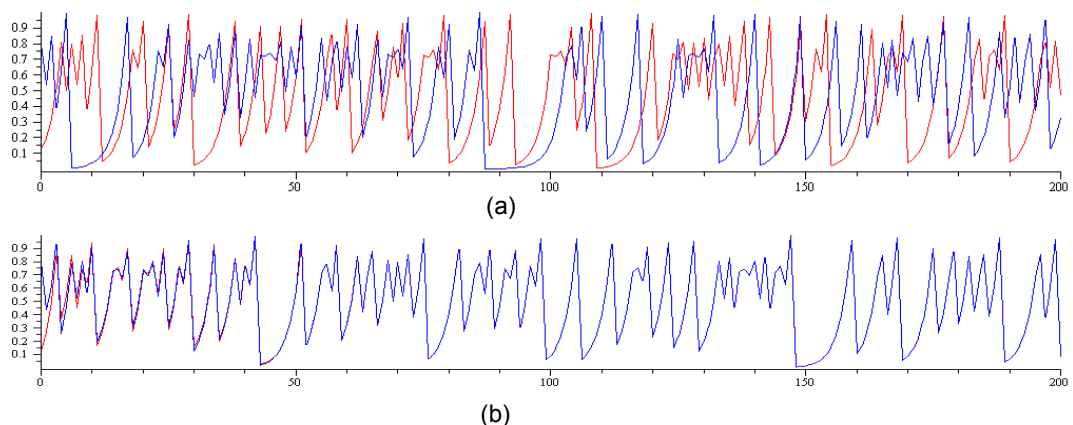
$$1 - (a-1)^{1-\frac{1}{a}} \cdot a^{-1} < (\delta + \varepsilon) < 1 + (a-1)^{1-\frac{1}{a}} \cdot a^{-1} \quad (3.2)$$

4. Sinkronisasi dan kestabilannya

Misal diberikan nilai awal pada pasangan *skew tent map* 2.2, maka pasangan tersebut dikatakan telah sinkron jika untuk yaitu pada saat Lyapunov eksponen dari pasangan tersebut bernilai negatif. Pembahasan sebelumnya telah dibahas bahwa Lyapunov eksponen dari pasangan *skew tent map* 2.2 bernilai negatif pada saat memenuhi ketaksamaan 3.2. Misal dipilih parameter maka parameter yang menyebabkan Lyapunov eksponen bernilai negatif adalah

Jika dipilih parameter dan berada pada interval tersebut, misal , maka setelah beberapa kali iterasi akan diperoleh hasil yang sinkron sebagaimana gambar 4.1 (b). Sedangkan gambar 4.1 (a) merupakan grafik iterasi sistem yang dibangkitkan *skew tent map* dengan parameter .

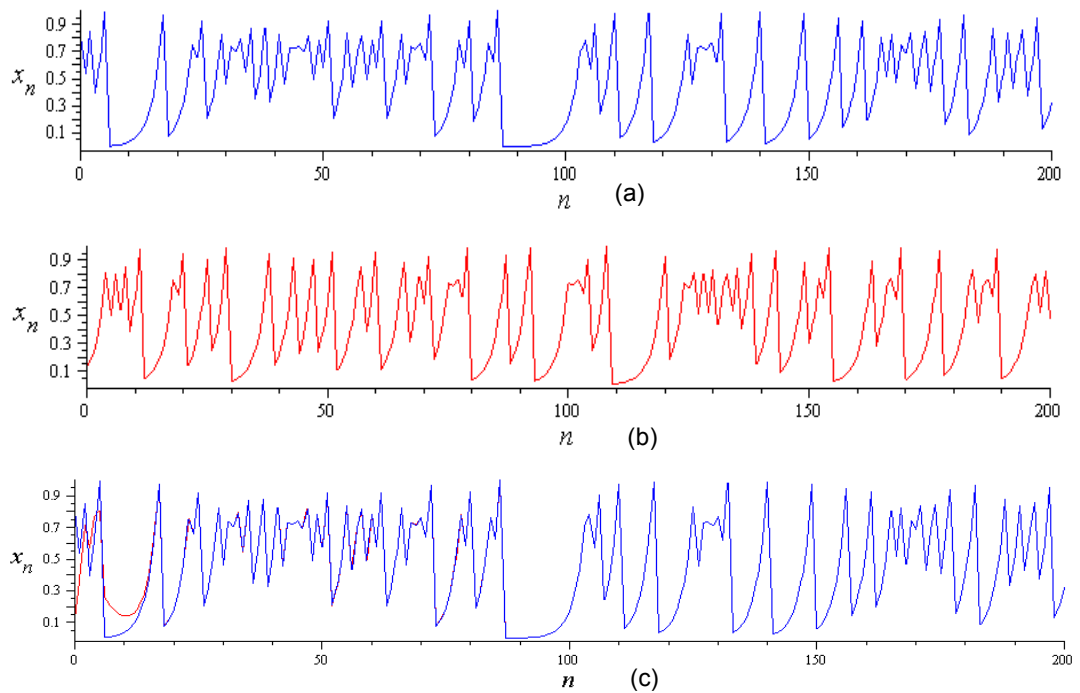
Lyapunov eksponen bernilai negatif menyebabkan kedua solusi tersebut semakin konvergen satu sama lain. Sehingga dapat disimpulkan bahwa sinkronisasi yang terjadi telah stabil.



Gambar 4.1. Grafik iterasi sistem yang dibangkitkan *skew tent map* (2.1) dengan dan nilai awal 0,8 dan 0,124 (a) belum sinkron (b) telah sinkron.

Pada beberapa kasus terapan, misalnya untuk mendekati suatu solusi sistem *chaos* yang sudah ada, maka kita harus mempertahankan solusi yang didekati tersebut. Untuk mempertahankan bentuk dari salah satu sistem *chaos* dengan pembangkit *skew tent map* tersebut, dapat dilakukan dengan menjadikan salah satu parameter sama dengan nol. Dengan kata lain dapat dipilih sehingga kita dapat mengubah pemasangan sistem *chaos* dengan pembangkit *skew tent map* (2.2) menjadi:

Pemasangan tersebutlah yang disebut sebagai *master-slave configuration* dimana x_{n+1} sebagai sistem *master* dan y_{n+1} sebagai sistem *slave*. Dengan *master-slave configuration* tersebut, maka hasil iterasi dari sistem *slave* y_{n+1} secara asimtotik akan mengikuti hasil iterasi dari x_{n+1} sebagai sistem *master* sebagaimana gambar 4.2 berikut:



Gambar 4.2. (a) grafik iterasi sistem x_{n+1} (b) grafik iterasi sistem y_{n+1} (c) grafik merah y_{n+1} mengikuti grafik iterasi x_{n+1}

5. Kesimpulan

Sistem dengan pembangkit *Skew tent map* yang merupakan salah satu contoh dari sistem *chaos* dimensi satu ternyata dapat disinkronkan. Tahap awal sinkronisasi pasangan sistem dengan pembangkit *skew tent map* dari dua nilai awal yang berbeda adalah memilih pemasangan peta yang sesuai dengan prinsip sinkronisasi dari beberapa jenis pemasangan peta. Dari jenis-jenis pemasangan peta, yang sesuai dengan konsep sinkronisasi adalah:

$$\begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f(x_n) + \delta(f(y_n) - f(x_n)) \\ f(y_n) + \varepsilon(f(x_n) - f(y_n)) \end{pmatrix}$$

dengan $f(x)$ menyatakan *skew tent map*, x dan y menunjukkan variable yang bergantung terhadap n , serta δ dan ε merupakan parameter dan $n = 0, 1, 2, \dots$

Dari pemasangan tersebut, maka perlu dicari parameter δ dan ε yang menyebabkan pemasangan tersebut sinkron yaitu yang menjadikan Lyapunov eksponennya bernilai negatif. Menggunakan birrchoff ergodic theorem, diperoleh $\delta + \varepsilon$ yang menyebabkan Lyapunov eksponennya bernilai negatif memenuhi,

$$1 - (a - 1)^{1-\frac{1}{a}} \cdot a^{-1} < (\delta + \varepsilon) < 1 + (a - 1)^{1-\frac{1}{a}} \cdot a^{-1}$$

Dengan mengambil parameter yang memenuhi ketaksamaan tersebut maka dapat diperoleh pasangan sistem dengan pembangkit *skew tent map* yang sinkron.

Karena Lyapunov eksponen yang bernilai negatif dapat mengakibatkan kekonvergenan, maka dapat disimpulkan bahwa sinkronisasi telah stabil.

6. Pustaka

- [1] Boccaletti, S. dkk. 2002. *The synchronization of chaotic system*. www.Elsevier.com/locate/physrep (diakses tanggal 1 Nopember 2011 pukul 19.05).
- [2] Dedieu, Herv'e . 1997. *Identifiability and Identification of Chaotic Systems Based on Adaptive Synchronization*. www.eecs.berkeley.edu (diakses tanggal 7 Desember 2011 pukul 17.42).
- [3] Hassler, Martin. 1997. *An Introduction To The Synchronization Of Chaotic Systems: Coupled Skew tent maps*. http://infoscience.epfl.ch/record/52235/files/IC_TECH_REPORT_199704.pdf (diakses tanggal 14 Oktober 2011 pukul 11.04).
- [4] Kuznetsov, Sergey. 2000. *System of Two Coupled Maps*. www.sgtnd.narod.ru (diakses tanggal 27 maret 2012 pukul 11.27).
- [5] Lynch, Stephen. 2001. *Dynamical Systems With Applications Using Maple*. Birkhauser : Boston.
- [6] Pecora, Lois.M., dan Thomas L. Carrol. 1990. *Synchronization in Chaotic Systems*. Link.com (diakses tanggal 17 Oktober 2011 pukul 14.55).

- [7] Penna, Michael. 2005. *Iteration and Chaos*. Brookscole.com (diakses tanggal 16 Nopember 2011 pukul 11.12).
- [8] Ridwan. T.N, Ahmad. 2006. *Dynamika Fraktal dan Chaos*. www.Scribd.com (diakses tanggal 12 Oktober 2011 pukul 16.22).
- [9] Shelhamer, Mark. 2007. *Nonlinear Dynamics in physiology: A State-Space Approach*. books.google.co.id (diakses tanggal 21 April 2012 pukul 13.18).
- [10] Steeb, Hans. 2011. *The Nonlinear Workbook 5th edition*. books.google.co.id (diakses tanggal 21 April 2012 pukul 12.01).
- [11] Verhulst, Ferdinand. 1996. *Non Linear Differential Equation and Dynamical Systems. 2nd edition*. Springer : Germany.
- [12] Peitgen, H.Otto.1992. *Chaos and Fractal*. Springer : New York.