EKSISTENSI TITIK TETAP DALAM RUANG METRIK PARSIAL

Ahmad Khairul Umam

Jurusan Matematika, F.MIPA, Universitas Brawijaya, Malang, Indonesia
Email : ahmad_khairul_umam@yahoo.com

Abstrak. Dalam artikel ini dipelajari eksistensi dan ketunggalan titik tetap suatu pemetaan dalam ruang metrik parsial yang dilengkapi 2 metrik parsial.

Kata Kunci : titik tetap, ruang metrik parsial, metrik parsial.

1. PENDAHULUAN

Titik tetap memiliki peranan yang sangat penting dalam menyelesaikan beberapa masalah matematis. Beberapa permasalahan matematis yang dapat diselesaikan dengan prinsip titik tetap antara lain masalah persamaan linier, persamaan differensial biasa, persamaan differensial parsial dan persamaan integral.

Salah satu teorema titik tetap yang terkenal adalah teorema titik tetap banach. Teorema tersebut menjamin eksistensi dan ketunggalan titik tetap untuk fungsi yang terdefinisi dalam ruang lengkap dan fungsi yang kontraktif (Oltra, 2004).

Dalam artikel ini dipelajari eksistensi dan ketunggalan titik tetap suatu pemetaan dalam ruang metrik parsial yang dilengkapi 2 metrik parsial (Karapinar, 2011).

2. HASIL DAN PEMBAHASAN

2.1 Ruang Metrik

Definisi 1. Diberikan himpunan tidak kosong X. Fungsi $d : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ disebut metrik pada X jika memenuhi aksioma-aksioma :

M1. $d(x,y) \geq 0$ untuk setiap $x,y \in X$;
M2. $d(x,y) = 0$ jika dan hanya jika $x = y$;
M3. $d(x,y) = d(y,x)$ untuk setiap $x,y \in X$;
M4. $d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y)$ untuk setiap x,y dan $z \in X$.

Himpunan X yang dilengkapi dengan fungsi jarak d, disebut ruang metrik dan dinyatakan dengan (X,d) (Muslikh, 2012).

Definisi 2. Suatu barisan $\langle x_n \rangle$ di dalam ruang metrik (X,d) dikatakan konvergen jika terdapat suatu titik $x \in X$ sedemikian rupa sehingga untuk setiap $\varepsilon > 0$ terdapat bilangan $N \in \mathbb{N}$ sehingga untuk setiap $n \geq N$ berlaku

$$d(x_n ,x) < \varepsilon \qquad \text{(Muslikh, 2012).}$$

Definisi 3. Barisan $\langle x_n \rangle$ di dalam ruang metrik (X,d) dikatakan barisan Cauchy jika untuk setiap $\varepsilon > 0$ terdapat bilangan $N \in \mathbb{N}$ sedemikian sehingga untuk setiap $n, m \geq N$ berlaku

$$d(x_m ,x_n) < \varepsilon \qquad \text{(Muslikh, 2012).}$$

Definisi 4. Ruang metrik dikatakan lengkap jika setiap barisan Cauchy di dalamnya konvergen (Muslikh, 2012).

Definisi 5. Misalkan ruang metrik (X,d). Pemetaan $f : X \rightarrow X$ dinamakan pemetaan kontraksi, jika ada suatu bilangan riil c dengan $0 \leq c < 1$ sedemikian sehingga :

$$d(f(x), f(y)) \leq cd(x,y),\ \forall\ x, y \in X \qquad \text{(Kreyszig, 1978).}$$

Definisi 6. Diberikan ruang metrik (X,d) dan suatu pemetaan $f : X \rightarrow X$. Titik $x \in X$ disebut titik tetap f jika $x = f(x)$ (Takashi dan Hiroyuki, 2010).

Teorema 1. *Misalkan (X,d) adalah ruang metrik lengkap. Jika $f : X \rightarrow X$ adalah pemetaan kontraksi pada X, maka f mempunyai titik tetap yang tunggal* (Kreyszig, 1978).

■

2.2 Ruang Metrik Parsial

Definisi 7. Sebuah ruang metrik parsial adalah sepasang (X, p) dimana X adalah himpunan tak kosong dan fungsi $p : X \times X \rightarrow \mathbb{R}^+$ yang memenuhi:
(PM1) $p(x,y) = p(y,x)$ (simetri)
(PM2) $p(x,x) = p(x,y) = p(y,y)$ jika dan hanya jika $x = y$ (kesamaan)
(PM3) $p(x,x) \leq p(y,x)$ (jarak ke diri sendiri kecil)
(PM4) $p(x,z) + p(y,y) \leq p(x,y) + p(y,z)$ (ketaksamaan segitiga)
Untuk semua $x, y, z \in X$ (Karapinar, 2011).

Lemma 1. *Misalkan (X,p) adalah sebuah ruang metrik parsial yang lengkap. Maka pernyataan-pernyataan berikut berlaku.*
i. *Jika $p(x,y) = 0$ maka $x = y$*
ii. *Jika $x \neq y$, maka $p(x,y) > 0$* (Karapinar, 2011).

Contoh 1. Misal $X = \mathbb{R}$. Didefinisikan fungsi $p : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+$ sebagai berikut :
$p(x,y) = \dfrac{|x-y|+|x|+|y|}{2}$, $\forall\, x, y \in \mathbb{R}$, maka p merupakan metrik parsial.

Contoh 2. Misalkan (X, p) ruang metrik parsial. Fungsi $d_p : X \times X \rightarrow \mathbb{R}^+$ didefinisikan
$$d_p(x,y) = 2p(x,y) - p(x,x) - p(y,y)$$
adalah metrik dalam X.

Definisi 8. Barisan titik $\langle x_n \rangle$ di dalam ruang metrik parsial (X, p) dikatakan konvergen ke $a \in X$, jika untuk setiap $\varepsilon > 0$ maka terdapat $N \in \mathbb{N}$ sedemikian sehingga $n \geq N$ berlaku
$$p(x_n, a) - p(a, a) < \varepsilon$$
(Bukatin, dkk., 2009).

Definisi 9. Barisan titik $\langle x_n \rangle$ di dalam ruang metrik parsial (X, p) dikatakan konvergen sejati ke $a \in X$, jika untuk setiap $\varepsilon > 0$ maka terdapat $N \in \mathbb{N}$ sedemikian sehingga $n \geq N$ berlaku
$$p(x_n, a) - p(a, a) < \varepsilon$$
dan
$$p(x_n, x_n) - p(a, a) < \varepsilon.$$

Definisi 10. Barisan titik $\langle x_n \rangle$ di dalam ruang metrik parsial (X, p) dikatakan Cauchy jika terdapat $\alpha \in \mathbb{R}$ sedemikian sehingga untuk setiap $\varepsilon > 0$ terdapat $N \in \mathbb{N}$ sehingga untuk semua $n, m > N$,
$$|p(x_n, x_m) - \alpha| < \varepsilon$$
(Bukatin, dkk., 2009).

Lemma 2. *Suatu barisan $\langle x_n \rangle$ di dalam (X,p) merupakan barisan Cauchy jika dan hanya jika $\langle x_n \rangle$ adalah Cauchy dalam sebuah ruang metrik (X,d_p)* (Karapinar, 2011).

Definisi 11. Ruang metrik parsial (X,p) dikatakan lengkap jika setiap barisan Cauchy $\langle x_n \rangle$ dalam X konvergen (Karapinar, 2011).

Lemma 3. *Ruang metrik parsial (X,p) lengkap jika dan hanya jika ruang metrik (X,d_p) lengkap* (Karapinar, 2011).

Lemma 4. *Jika $x_n \rightarrow z$ dalam suatu ruang metrik parsial (X,p) sedemikian sehingga $p(z,z) = 0$, maka $lim_{n\rightarrow\infty}\, p(x_n, y) = p(z, y)$ untuk setiap $y \in X$* (Karapinar, 2011).

Definisi 12. Diberikan ruang metrik parsial (X,p). Suatu fungsi $f : X \rightarrow X$ disebut kontraksi jika terdapat $0 \leq c < 1$sedemikian sehingga untuk semua $x, y \in X$ berlaku
$$p(f(x), f(y)) \leq cp(x,y)$$
(Bukatin, dkk., 2009).

Teorema 2. *Diberikan f adalah suatu pemetaan dari ruang metrik parsial (X,p) yang lengkap ke dirinya sendiri sedemikian sehingga ada bilangan riil c dengan $0 \leq c < 1$, yang memenuhi*
$$p(f(x),f(y)) \leq cp(x,y)$$
untuk semua $x,y \in X$. Maka f mempunyai titik tetap yang tunggal (Oltra dan Valero, 2004).

Teorema 3. *Diberikan himpunan X yang tidak kosong,* p_1, p_2 *metrik parsial pada X dan* $T : X \to X$. *Jika kriteria di bawah ini terpenuhi:*

i. *(X,p_1) lengkap*
ii. $p_1(x,y) \leq p_2(x,y)$ *untuk setiap* $x,y \in X$
iii. *T kontinu terhadap* p_1
iv. *T pemetaan kontraksi terhadap* p_2, *sedemikian sehingga* $p_2(T(x), T(y)) \leq cp_2(x,y)$ *untuk setiap* $x,y \in X$, *dimana* $0 \leq c < 1$

maka T memiliki titik tetap yang tunggal (Karapinar, 2011).

Bukti: Misalkan $x \in X$. Kita bangun suatu barisan $\langle x_n \rangle$ dengan cara berikut.

(S1) $x_0 = x$

(S2) $x_n = T(x_{n-1}) = T^n(x_0)$

untuk setiap $n \in \mathbb{R}$ maka, dari asumsi (iv) kita dapatkan

$$p_2(x_{n+1}, x_n) = p_2(T(x_n), T(x_{n-1})) \leq cp_2(x_n, x_{n-1}) \leq \ldots \leq c^n p_2(T(x_0), x_0) \quad (1)$$

Ambil $n, m \in \mathbb{N}$ dengan $n > m$, maka dengan ketaksamaan segitiga dan (1) didapatkan :

$$\begin{aligned}
p_2(x_m, x_n) &\leq p_2(x_m, x_{m+1}) + p_2(x_{m+1}, x_n) - p_2(x_{m+1}, x_{m+1}) \\
&\leq c^m p_2(x_0, x_1) + p_2(x_{m+1}, x_n) - p_2(x_{m+1}, x_{m+1}) \\
&\leq c^m p_2(x_0, x_1) + p_2(x_{m+1}, x_n) \\
&\leq c^m p_2(x_0, x_1) + p_2(x_{m+1}, x_{m+2}) + p_2(x_{m+2}, x_n) \\
&\quad - p_2(x_{m+2}, x_{m+2}) \\
&\leq c^m p_2(x_0, x_1) + c^{m+1} p_2(x_0, x_1) + p_2(x_{m+2}, x_n) \\
&\quad - p_2(x_{m+2}, x_{m+2}) \\
&\leq c^m p_2(x_0, x_1) + c^{m+1} p_2(x_0, x_1) + p_2(x_{m+2}, x_n) \\
&\leq c^m p_2(x_0, x_1) + c^{m+1} p_2(x_0, x_1) + p_2(x_{m+2}, x_{m+3}) \\
&\quad + p_2(x_{m+3}, x_n) - p_2(x_{m+3}, x_{m+3}) \\
&\leq c^m p_2(x_0, x_1) + c^{m+1} p_2(x_0, x_1) + c^{m+2} p_2(x_0, x_1) \\
&\quad + p_2(x_{m+3}, x_n) - p_2(x_{m+3}, x_{m+3}) \\
&\leq c^m p_2(x_0, x_1) + c^{m+1} p_2(x_0, x_1) + c^{m+2} p_2(x_0, x_1) \\
&\quad + p_2(x_{m+3}, x_n) \\
&\leq c^m p_2(x_0, x_1) + c^{m+1} p_2(x_0, x_1) + c^{m+2} p_2(x_0, x_1) \\
&\quad + \ldots + c^{n-2} p_2(x_0, x_1) + c^{n-1} p_2(x_0, x_1) \\
&= c^m (1 + c + \ldots + c^{n-m-2} + c^{n-m-1}) p_2(x_0, x_1) \\
&= c^m \sum_{i=0}^{n-m-1} c^i \, p_2(x_0, x_1) \qquad (2)
\end{aligned}$$

Karena $0 \leq c < 1$, maka deret $\sum_{i=0}^{n-m-1} c^i$ pada ketaksamaan (2) konvergen ke $\frac{1}{1-c}$ sehingga didapat:

$$p_2(x_m, x_n) \leq \frac{c^m}{1-c} p_2(x_0, x_1).$$

Dimisalkan $p_2(x_0, x_1) = r$, untuk $n > m > N$ maka diperoleh

$$p_2(x_m, x_n) \leq \frac{rc^m}{1-c}.$$

Dipilih $N \in \mathbb{N}$ dengan

$$N < {}^{c}\log \frac{\varepsilon(1-c)}{r}$$

$$c^N < \frac{\varepsilon(1-c)}{r}$$

Sehingga $\frac{rc^N}{1-c} < \frac{r}{1-c} \cdot \frac{\varepsilon(1-c)}{r} = \varepsilon$.
Maka diperoleh

$$p_2(x_m, x_n) \leq \frac{rc^m}{1-c} \leq \frac{rc^N}{1-c} < \varepsilon.$$

Sehingga $\lim_{n,m\to\infty} p_2(x_n, x_m) = 0$, dengan demikian $\langle x_n \rangle$ adalah barisan Cauchy dalam (X,p_2). Dari asumsi (ii) $\lim_{n,m\to\infty} p_1(x_n, x_m) = 0$, yaitu $\langle x_n \rangle$ adalah barisan Cauchy dalam (X,p_1). Jadi, dari asumsi (i) dan lemma 2 dan lemma 3, konvergen dalam (x,d_{p1}) untuk sebuah titik $z \in X$ dari lemma 3 pula

$$p_1(z,z) = \lim_{n\to\infty} p_1(x_n, z) = \lim_{n,m\to\infty} p_1(x_n, x_m). \tag{3}$$

Karena $\lim_{n,m\to\infty} p_1(x_n, x_m) = 0$, maka dari (3) kita punya $p_1(z,z) = 0$.

Dari kekontinuan T dan juga lemma 4, kita mendapatkan

$$\begin{aligned} p_1(z,z) &= \lim_{n\to\infty} p_1(z, x_{n+1}) = \lim_{n\to\infty} p(z, T^{n+1}(x_0)) = p_1(z, T(\lim_{n\to\infty} T^n(x_0))) \\ &= p_1(z, T(\lim_{n\to\infty} x_n)) = p_1(z, T(z)). \end{aligned}$$

Karena itu $p_1(T(z), z) = p_1(z,z) = 0$. Disebabkan Lemma 1 titik z adalah sebuah titik tetap yang tunggal dari T. Andaikan tidak yaitu terdapat $z,y \in X$ sedemikian sehingga $T(z) = z$ dan $T(y) = y$. Maka, $p_2(z, y) = p_2(T(z), T(y)) \leq cp_2(z,y)$. Demikian, $p_2(z,y) = 0$. Dari Lemma 1, $z = y$.

■

3. KESIMPULAN

Diberikan f adalah suatu pemetaan dari ruang metrik parsial (X,p) yang lengkap ke dirinya sendiri sedemikian sehingga ada bilangan riil c dengan $0 \leq c < 1$, yang memenuhi

$$p(f(x),f(y)) \leq cp(x,y)$$

untuk semua $x,y \in X$. Maka f mempunyai titik tetap yang tunggal.

Begitu juga diberikan himpunan X yang tidak kosong yang dilengkapi metrik parsial p_1 & p_2 dan $T : X \to X$, jika kriteria dibawah ini terpenuhi:

i. (X,p_1) lengkap
ii. $p_1(x,y) \leq p_2(x,y)$ untuk setiap $x,y \in X$
iii. T kontinu terhadap p_1
iv. T pemetaan kontraksi terhadap p_2, sedemikian sehingga $p_2(T(x), T(y)) \leq kp_2(x,y)$ untuk setiap $x,y \in X$, dimana $0 \leq k < 1$

maka T memiliki titik tetap yang tunggal.

DAFTAR PUSTAKA

Bukatin, M., Kopperman, R., Matthews, S., Pajoohesh, H., (2009), Partial Metric Spaces, *The Mathematical Association of America*, hal. 708 – 718.

Karapinar, E., (2011), Some Fixed Point Theorems on The Class of Comparable Partial Metric Spaces, *Universidad Politecnica de Valencia*, hal. 187 - 192.

Kreyszig, E., (1978), *Introductory Functional Analysis with Aplication*, John Wiley and Sons, Inc. Canada, hal. 30, 300.

Muslikh, M., (2012), *Analisis Real*. UB Press. Universitas Brawijaya, Malang, hal. 38, 66, 81, 83.

Oltra, S. dan Valero, O., (2004), Banach's Fixed Point Theorem for Partial Metric Spaces, *Rend. Istit. Mat. Univ. Trieste*, hal. 17 - 26.

Takashi, S. dan Hiroyuki, Y., (2010), *Introduction to Mathematical Science Model*, Baifukan. Japan, hal. 27.