Ahmad Khairul Umam, S.Si., M.Si.
Prodi Matematika, Universitas Billfath

ANALISIS REAL 2

Ruang Metrik

Definisi 1. Diberikan himpunan tidak kosong X. Fungsi $d: X\ x\ X \to \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$ disebut metrik pada X jika memenuhi aksioma-aksioma:

M1. $d(x,y) \geq 0$ untuk setiap $x, y \in X$

M2. $d(x,y) = 0$ jika dan hanya jika $x = y$

M3. $d(x,y) = d(y,x)$ untuk setiap $x, y \in X$

M4. $d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y)$ untuk setiap x, y dan $z \in X$.

Himpunan X yang dilengkapi dengan fungsi jarak d, disebut ruang metrik dan dinyatakan dengan (X, d).

Barisan dan Deret

Barisan

Definisi 2. Diberikan ruang metrik *X* dan himpunan bilangan asli $\mathbb{N}$. Barisan titik di dalam ruang metrik *X* adalah fungsi $f: \mathbb{N} \to X$ dengan $f(n) = x_n \in X$ untuk setiap $n \in \mathbb{N}$.

Barisan Fibonacci $\langle x_n \rangle = 1, 1, 2, 3, 5, 8, \ldots$ adalah barisan Divergen.

Kekonvergenan Barisan

Definisi 3. Suatu barisan $\langle x_n \rangle$ di dalam ruang metrik (*X*,*d*) dikatakan konvergen jika terdapat suatu titik $x \in X$ sedemikian rupa sehingga untuk setiap $\varepsilon > 0$ terdapat bilangan $N \in \mathbb{N}$ sehingga untuk setiap $n \geq N$ berlaku

$$d(x_n, x) < \varepsilon.$$

Teorema 1. Jika $a \in \mathbb{R}$ dan $0 \leq a < \varepsilon$ untuk setiap $\varepsilon > 0$, maka $a = 0$.

Teorema 2. Jika barisan $\langle x_n \rangle$ dalam (*X*,*d*) konvergen maka limit barisannya tunggal.

Bukti:

Misalkan $\langle x_n \rangle$ konvergen ke titik *x* dan *y*, akan dibuktikan *x* = *y* (tunggal). Diberikan sebarang $\varepsilon > 0$. Karena x_n konvergen ke *x* dan *y* maka terdapat $N_1 \in \mathbb{N}$ dan $N_2 \in \mathbb{N}$ sehingga untuk setiap $n \geq N_1$ berlaku

$$d(x_n, x) < \varepsilon/2, \qquad (1)$$

dan untuk setiap $n \geq N_2$ berlaku

$$d(x_n, y) < \varepsilon/2. \qquad (2)$$

Jika bilangan $N = \text{maks}\ \{N_1, N_2\}$ maka dari ketaksamaan (1), (2) dan ketaksamaan segitiga diperoleh

$$d(x,y) \leq d(x_n, x) + d(x_n, y) < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon,$$

untuk setiap $n \geq N$. Jadi $d(x,y) < \varepsilon$. Karena $\varepsilon > 0$ sebarang maka *x* = *y* (tunggal).

Barisan Cauchy

Definisi 4. Barisan $\langle x_n \rangle$ di dalam ruang metrik (*X*,*d*) dikatakan barisan Cauchy jika untuk setiap $\varepsilon > 0$ terdapat bilangan $N \in \mathbb{N}$ sedemikian sehingga untuk setiap $n, m \geq N$ berlaku

$$d(x_m, x_n) < \varepsilon.$$

Teorema 3. Setiap barisan yang konvergen dalam suatu metrik (*X*,*d*) merupakan barisan Cauchy.

Bukti:

Misalkan $x_n \rightarrow x$. Maka untuk setiap $\varepsilon > 0$ terdapat $N \in \mathbb{N}$ sedemikian hingga untuk setiap $n \geq N$ berlaku

$$d(x_n, x) < \varepsilon/2,$$

ambil $m > n \geq N$, maka juga berlaku $d(x_m, x) < \varepsilon/2$. Dengan ketaksamaan segitiga, maka untuk m, $n \geq N$ berlaku

$$d(x_m, x_n) \leq d(x_m, x) + d(x, x_n) < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon.$$

Dengan demikian, $\langle x_n \rangle$ adalah barisan Cauchy. Teorema di atas tidak berlaku sebaliknya.

Contoh

1. Buktikan bahwa barisan-barisan berikut merupakan barisan Cauchy:
   a. $\langle x_n \rangle = \langle \frac{1}{n} \rangle, n \in \mathbb{N}$

      Jawab

      Ambil sebarang $\mathcal{E} > 0$. Pilih $N > \frac{2}{\varepsilon}$ sehingga untuk setiap $n, m \geq N$, berlaku

      $$|x_m - x_m| = \left|\frac{1}{m} - \frac{1}{n}\right| \leq \frac{1}{m} + \frac{1}{n} \leq \frac{1}{N} + \frac{1}{N} = \frac{2}{N} < \varepsilon.$$

      Jadi barisan $\langle x_n \rangle = \frac{1}{n}$, $n \in \mathbb{N}$ adalah barisan Chaucy.

   b. $\langle x_n \rangle = \langle \frac{n+1}{n} \rangle$, $n \in \mathbb{N}$
   c. $\langle x_n \rangle = \langle 1 + \frac{1}{n} \rangle, n \in \mathbb{N}$

Kelengkapan

Definisi 5. Ruang metrik dikatakan lengkap jika setiap barisan Cauchy di dalamnya konvergen.

Ekor Barisan

Definisi 6. Diberikan barisan $\langle x_n \rangle = \langle x_1, x_2, x_3, \dots, x_n, \dots \rangle, n \in \mathbb{N}$, maka ekor-$m$ dari barisan $\langle x_n \rangle$ adalah $\langle x_{m+n} \rangle = \langle x_{m+1}, x_{m+2}, x_{m+3}, \dots, x_{m+n}, \dots \rangle$ dimana $m, n \in \mathbb{N}$.

Contoh

1. Ekor-3 dari barisan $\langle x_n \rangle = \langle \frac{1}{n} \rangle, n \in \mathbb{N}$ adalah . . .

   Jawab

   $$\begin{aligned} \langle x_{3+n} \rangle &= \langle \frac{1}{3+n} \rangle, n \in \mathbb{N} \\ &= \langle \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \frac{1}{6}, \dots \rangle \end{aligned}$$

2. Ekor-5 dari barisan $\langle x_n \rangle = \langle \frac{1}{2^n} \rangle, n \in \mathbb{N}$ adalah . . .

Barisan Terbatas

Definisi 7. Barisan $\langle x_n \rangle$ dikatakan terbatas jika terdapat bilangan real $M > 0$ sedemikian sehingga $|x_n| \leq M$ untuk setiap $n \in \mathbb{N}$.

1. Buktikan bahwa barisan-barisan berikut terbatas:
   a. $\langle x_n \rangle = \langle \frac{1}{n} \rangle, n \in \mathbb{N}$

      Jawab

      Barisan $\langle x_n \rangle = \langle \frac{1}{n} \rangle, n \in \mathbb{N}$ terbatas karena terdapat bilangan $M = 1$ sehingga $|x_n| = \left|\frac{1}{n}\right| \leq 1$ untuk setiap $n \in \mathbb{N}$.

   b. $\langle x_n \rangle = \langle (-1)^n \rangle, n \in \mathbb{N}$
   c. $\langle x_n \rangle = \langle \frac{n}{n+1} \rangle, n \in \mathbb{N}$

Teorema 4. Barisan bilangan real yang konvergen adalah terbatas.

Bukti

Misalkan barisan bilangan real $\langle x_n \rangle$ adalah barisan konvergen ke $x \in \mathbb{R}$. Itu berarti bahwa jika kita ambil $\mathcal{E}_0 > 0$, terdapat bilangan real $N(\mathcal{E}_0) > 0$ sehingga $|x_n - x| < \mathcal{E}_0$ untuk semua $n \geq N(\mathcal{E}_0)$.

Selanjutnya perhatikan bahwa berdasarkan ketaksamaan segitiga,
$|x_n| = |(x_n - x) + x| \leq |x_n - x| + |x| < \mathcal{E}_0 + |x|$ untuk semua $n \geq N(\mathcal{E}_0)$.

Berikutnya, pilih $M = maks\{|x_1|, |x_2|, \dots, |x_{N(\mathcal{E}_0)-1}|, |x| + \mathcal{E}_0\}$. Jelas bahwa untuk setiap $n \in \mathbb{N}$ berlaku $|x_n| \leq M$, jadi barisan bilangan real $\langle x_n \rangle$ terbatas.

Latihan Soal

1. Apakah barisan-barisan berikut terbatas
   a. $\langle x_n \rangle = \langle \frac{1}{n^2} \rangle, n \in \mathbb{N}$
   b. $\langle x_n \rangle = \langle \sqrt{n} \rangle, n \in \mathbb{N}$
   c. $\langle x_n \rangle = \langle \frac{n}{2n+1} \rangle, n \in \mathbb{N}$

Barisan Monoton

Definisi 8. Barisan $\langle x_n \rangle$ dikatakan naik jika $x_1 \leq x_2 \leq \cdots \leq x_n \leq x_{n+1} \leq \cdots$ dan dikatakan turun jika $x_1 \geq x_2 \geq \cdots \geq x_n \geq x_{n+1} \geq \cdots$. Barisan $\langle x_n \rangle$ yang naik atau turun disebut barisan Monoton.

Contoh

1. Diantara barisan-barisan $\langle x_n \rangle$ berikut, yang merupakan barisan monoton adalah barisan ....
   a. $\langle x_n \rangle = \langle \sin n, \rangle n \in \mathbb{N}$
   b. $\langle x_n \rangle = \langle \frac{n^2+1}{n} \rangle, n \in \mathbb{N}$
   c. $\langle x_n \rangle = \langle 2^n \rangle, n \in \mathbb{N}$
   d. $\langle x_n \rangle = \langle (-1)^n \rangle, n \in \mathbb{N}$

Teorema 5. Diberikan barisan bilangan real $\langle x_n \rangle$ monoton. Jika $\langle x_n \rangle$ terbatas, maka $\langle x_n \rangle$ konvergen.

Bukti

Dalam pembuktian ini, diasumsikan barisan $\langle x_n \rangle$ monoton naik. Karena itu barisan $\langle x_n \rangle$ akan terbatas ke atas. Dimisalkan daerah jangkau barisan adalah himpunan $A = \{x_n \mid n \in \mathbb{N}\} \subset \mathbb{R}$, maka A mempunyai supremum di dalam $\mathbb{R}$. Katakan

$$a = \sup A \in \mathbb{R},$$

maka untuk setiap $n \in \mathbb{N}$, $x_n \leq a$. Ambil $\varepsilon > 0$, tentu $a - \varepsilon$ bukan batas atas A. Oleh karena itu, terdapat $N \in \mathbb{N}$ sehingga

$$a - \varepsilon < x_n \leq a < a + \varepsilon. \tag{3}$$

Karena $\langle x_n \rangle$ monoton naik, sehingga untuk setiap $n \geq N$, $x_N \leq x_n$. Dengan memperhatikan ketaksamaan (3), untuk setiap $n \geq N$ diperoleh

$$a - \varepsilon < x_N \leq x_n \leq a < a + \varepsilon$$

atau

$$a - \varepsilon < x_n < a + \varepsilon \tag{4}$$

Jadi untuk setiap $\varepsilon > 0$ terdapat $N \in \mathbb{N}$ sehingga untuk setiap $n \geq N$, berlaku ketaksamaan (4). Terbukti barisan $\langle x_n \rangle$ konvergen ke a.

Sub Barisan

Definisi 9. Misalkan $\langle x_n \rangle$ adalah barisan bilangan real dan $n_1 < n_2 < \cdots < n_k < \cdots$ dengan $n_k \in \mathbb{N}$ untuk semua $k \in \mathbb{N}$. Barisan bilangan real $\langle x_{n_k} \rangle$ dimana $k \in \mathbb{N}$ disebut sebagai sub barisan dari $\langle x_n \rangle, n \in \mathbb{N}$.

Contoh

Misalkan barisan bilangan real $\langle x_n \rangle = \langle \frac{1}{n} \rangle, n \in \mathbb{N}$. Barisan tersebut adalah $\langle 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots \rangle$. Jika dipilih suku-suku genap dari barisan tersebut, yaitu $\langle x_{n_k} \rangle = \langle \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{6}, \dots, \frac{1}{2k}, \dots \rangle$ maka $\langle x_{n_k} \rangle$ merupakan sub barisan dari $\langle x_n \rangle$.

Teorema 6. Barisan bilangan real $\langle s_n \rangle$ konvergen ke s jika dan hanya jika setiap sub barisan dari $\langle s_n \rangle$ juga konvergen ke s.

Bukti

($\Longrightarrow$) Diberikan $\varepsilon > 0$. Karena $\langle s_n \rangle$ konvergen ke s, maka terdapat $N \in \mathbb{N}$ sehingga untuk setiap $n \geq N$ berlaku

$$|s_n - s| < \varepsilon. \tag{5}$$

Ambil sebarang sub barisan $\langle s_{n_k} \rangle$ dari $\langle s_n \rangle$. Karena untuk setiap $k \in \mathbb{N}$, $n_k \geq k$ maka untuk setiap $k \geq N$ akan berakibat $n_k \geq N$, sehingga menurut ketaksamaan (5) berlaku

$$|s_{n_k} - s| < \varepsilon. \tag{6}$$

Dengan kata lain, untuk setiap $\varepsilon > 0$ terdapat $N \in \mathbb{N}$ sehingga untuk setiap $k \geq N$ berlaku ketaksamaan (6). Terbukti sub barisan $\langle s_{n_k} \rangle$ konvergen ke s.

($\Longleftarrow$) Sebaliknya, karena setiap sub barisan dari $\langle s_n \rangle$ konvergen ke s, maka dapat diambil salah satu sub barisannya adalah barisan itu sendiri. Terbukti barisan $\langle s_n \rangle$ konvergen ke s.

Latihan Soal

1. Yang merupakan sub barisan dari barisan $\langle 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots, \frac{1}{n}, \dots \rangle$ adalah ....
   a. $\langle \frac{1}{3}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \dots \rangle$
   b. $\langle \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \dots \rangle$
   c. $\langle \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \frac{1}{6}, \frac{1}{7}, \frac{1}{8}, \dots \rangle$
   d. $\langle 1, 2, 3, 4, 5, 6, \dots \rangle$
2. Diantara barisan-barisan berikut yang merupakan barisan monoton adalah ....
   a. $\langle (-1)^n \rangle$
   b. $\langle (-1)^n n \rangle$
   c. $\langle (-1)^{2n} \rangle$
   d. Tidak ada jawaban yang tepat
3. Kesimpulan yang paling tepat untuk barisan (0, 2, 0, 2, ..., 0, 2, ...) adalah barisan tersebut merupakan barisan ....
   a. Konstan
   b. Monoton
   c. Konvergen
   d. Tidak konvergen
4. Barisan $\langle x_n \rangle = \langle \frac{1}{\sqrt{n}} \rangle, n \in \mathbb{N}$ konvergen ke ....
   a. 0
   b. $\frac{1}{2}$
   c. $\frac{1}{n}$
   d. 1
5. Barisan $\langle x_n \rangle = \langle \frac{n+1}{n} \rangle, n \in \mathbb{N}$ merupakan barisan ....
   a. Tidak konvergen
   b. Terhingga
   c. Monoton

d. Tidak dapat ditentukan

6. Barisan bilangan real $\langle x_n \rangle = \langle \frac{n}{n+1} \rangle, n \in \mathbb{N}$ merupakan barisan terbatas dengan ....
   a. Batas atas terkecilnya adalah 1
   b. Batas bawah terbesarnya adalah 1
   c. Batas atas terkecilnya adalah 2
   d. Batas bawah terbesarnya adalah 2
7. Apakah barisan konstan $\langle x_n \rangle = \langle 3, 3, 3, \dots \rangle$ konvergen?
8. Buktikan barisan $\langle x_n \rangle = \langle \frac{n}{n+1} \rangle, n \in \mathbb{N}$ konvergen!
9. Buktikan bahwa barisan $\langle x_n \rangle = \langle 1 + \frac{1}{2n} \rangle, n \in \mathbb{N}$ merupakan barisan Cauchy!
10. Buktikan bahwa barisan $\langle x_n \rangle = \langle \frac{3n+2}{n+1} \rangle, n \in \mathbb{N}$ terbatas!

DERET

Definisi 10. Diberikan barisan $u_1, u_2, u_3, \dots, u_n, \dots$. Jumlah tak hingga suku-suku tersebut, $\sum_{n=1}^{\infty} u_n = u_1 + u_2 + \cdots + u_n + \cdots$ disebut deret tak hingga atau disingkat deret.

Contoh

1. Buktikan deret $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots$ konvergen!

Bukti

Karena jumlahan parsialnya monoton, maka cukup ditunjukkan bahwa barisan bagian $\langle s_k \rangle$ terbatas.

- Jika $k_1 = 2^1 - 1 = 1$
  maka $s_{k_1} = 1$
- Jika $k_2 = 2^2 - 1 = 3$
  maka $s_{k_2} = 1 + \left(\frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2}\right) < 1 + \left(\frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^2}\right) = 1 + \frac{2}{2^2} = 1 + \frac{1}{2}$
- Jika $k_3 = 2^3 - 1 = 7$
  maka $s_{k_3} = 1 + \left(\frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2}\right) + \left(\frac{1}{4^2} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{6^2} + \frac{1}{7^2}\right) = s_{k_2} + \left(\frac{1}{4^2} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{6^2} + \frac{1}{7^2}\right) < s_{k_2} + \frac{4}{4^2}$
  $$= s_{k_2} + \frac{1}{4} = s_{k_2} + \frac{1}{2^2} < 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2}$$
- Jika $k_j = 2^j - 1$
  maka
  $$0 < s_{k_j} < 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{2^{j-1}} \tag{7}$$

Berdasarkan ketaksamaan (7), di ruas kanan dibuat menjadi deret geometri tak hingga dengan $r = \frac{1}{2}$, sehingga untuk jumlahannya $\sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{2^{j-1}} = \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = 2$. Jadi deret $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ konvergen.

2. Buktikan deret $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \cdots$ konvergen!

Bukti

Perhatikan:
$$\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \cdots$$
Dan
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} - \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = \frac{1}{2}$$
$$\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = \frac{1}{2}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = 1$$

$\therefore$ Jadi $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}$ konvergen.

Uji perbandingan

Diberikan barisan bilangan real $\langle x_n \rangle$ dan $\langle y_n \rangle$, dan misalkan untuk suatu $K \in \mathbb{N}$ berlaku $0 \leq x_n \leq y_n$ untuk $n \geq K$.

a. Jika $\sum y_n$ konvergen, maka $\sum x_n$ konvergen.
b. Jika $\sum x_n$ divergen, maka $\sum y_n$ divergen.

Contoh

3. Buktikan deret $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n+1}$ konvergen!

Bukti

Diketahui bahwa $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}$ konvergen. Terlihat bahwa

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n + 1} < \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}.$$

Sesuai uji perbandingan, maka $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n+1}$ konvergen.

Latihan Soal

1. Apakah deret $\sum_{n=1}^{\infty} 1 = 1 + 1 + 1 + \cdots$ konvergen atau divergen?
2. Tentukan apakah deret $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \cdots$ konvergen atau divergen!
3. Buktikan deret $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots$ divergen!
4. Buktikan deret $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n$ divergen!
5. Buktikan deret $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$ konvergen!
6. Buktikan deret $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+n}$ konvergen!

LIMIT

Definisi 11.

$$\lim_{x \to c} f(x) = L$$

Jika untuk setiap $\varepsilon > 0$ terdapat $\delta > 0$, sedemikian sehingga jika $0 < |x - c| < \delta$ maka $|f(x) - L| < \varepsilon$.

Atau bisa ditulis

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta > 0 \; \ni \; 0 < |x - c| < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon$$

Contoh

1. Buktikan

$$\lim_{x \to 2} 2x + 3 = 7 \,!$$

Jawab

Diketahui:

$$0 < |x - 2| < \delta$$

Proses pembuktian:

Ambil sebarang $\varepsilon > 0$. Pilih $\delta \leq \frac{\varepsilon}{2}$, sehingga untuk $0 < |x - 2| < \delta$ berlaku:

$$|f(x) - L| = |2x + 3 - 7| = |2x - 4| = |2||x - 2| = 2|x - 2| < 2.\delta \leq 2.\frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

$\therefore$ Jadi terbukti $\lim_{x \to 2} 2x + 3 = 7$.

2. Buktikan $\lim_{x \to 2} x^2 = 4$!

Jawab

Diketahui:

$$0 < |x-2| < \delta.$$

Kemudian yang akan dituju

$$\begin{aligned} |x^2-4| &< \varepsilon \\ |(x+2)(x-2)| &< \varepsilon \\ |x+2||x-2| &< \varepsilon \end{aligned} \tag{8}$$

Suku pertama ruas kiri menjadi

$$|x+2| = |x-2+4| \leq |x-2| + |4| = |x-2| + 4 < \delta + 4$$

Pilih $\delta \leq 1$, sehingga

$$|x+2| < \delta + 4 \leq 1 + 4 = 5.$$

Karena

$$|x+2||x-2| < 5.\delta$$

Supaya selaras dengan pertidaksamaan (8)

$$|x+2||x-2| < \varepsilon$$

Maka perlu

$$\begin{aligned} 5.\delta &\leq \varepsilon \\ \delta &\leq \frac{\varepsilon}{5} \end{aligned}$$

Jadi pada proses pembuktian dipilih $\delta \leq \min\left\{1, \frac{\varepsilon}{5}\right\}$.

Proses pembuktian:

Ambil sebarang $\varepsilon > 0$. Pilih $\delta \leq \min\left\{1, \frac{\varepsilon}{5}\right\}$, sehingga untuk $0 < |x-2| < \delta$ berlaku:

$|f(x) - L| = |x^2 - 4| = |(x+2)(x-2)| = |x+2||x-2| < 5.\delta \leq 5.\dfrac{\varepsilon}{5} = \varepsilon.$

$\therefore$ Jadi terbukti $\lim\limits_{x\to 2} x^2 = 4$.

Latihan Soal

1. Buktikan $\lim\limits_{x\to 2} 3x = 6$!
2. Buktikan $\lim\limits_{x\to 3} x + 2 = 5$!
3. Buktikan $\lim\limits_{x\to a} x^2 = a^2$!
4. Buktikan $\lim\limits_{x\to 1} 2x^2 + 3 = 5$!
5. Carilah nilai $\lim\limits_{x\to c} x$ menggunakan definisi !
6. Carilah nilai $\lim\limits_{x\to 2} \frac{x^2-4}{x-2}$ menggunakan definisi !
7. Buktikan $\lim\limits_{x\to 3} x^2 + x - 5 = 7$!

Limit Satu Sisi

Limit Kiri

Definisi 12

$$\lim_{x\to c^-} f(x) = L$$

Jika untuk setiap $\varepsilon > 0$ terdapat $\delta > 0$, sedemikian sehingga jika $0 < c - x < \delta$ maka $|f(x) - L| < \varepsilon$.

Atau bisa ditulis

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \ni\ 0 < c - x < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon$$

Limit Kanan

Definisi 13

$$\lim_{x\to c^+} f(x) = L$$

Jika untuk setiap $\varepsilon > 0$ terdapat $\delta > 0$, sedemikian sehingga jika $0 < x - c < \delta$ maka $|f(x) - L| < \varepsilon$.
Atau bisa ditulis

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \ni\ 0 < x - c < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon$$

Contoh
Buktikan untuk

$$f(x) = \begin{cases} 2x, x < 1 \\ 3, x \geq 1 \end{cases}$$

limit x mendekati 1 dari kiri hasilnya 2, dan limit x mendekati 1 dari kanan hasilnya 3!
Jawab
Limit kiri
Diketahui:

$$0 < 1 - x < \delta \tag{9}$$

Proses pembuktian:
Ambil sebarang $\varepsilon > 0$. Pilih $\delta \leq \frac{\varepsilon}{2}$, sehingga untuk $0 < 1 - x < \delta$ berlaku:
$|f(x) - L| = |2x - 2| = |2||x - 1| = 2|x - 1| = 2|1 - x|$
Kita ketahui bahwa

$$|1 - x| = \begin{cases} 1 - x, (1 - x) \geq 0 \\ -(1 - x), (1 - x) < 0 \end{cases}$$

Dipilih

$$|1 - x| = 1 - x \tag{10}$$

untuk $(1 - x) \geq 0$. Karena dari pertidaksamaan (9) yaitu $1 - x > 0$, maka kita dapat memakai persamaan (10), sehingga menjadi

$$|f(x) - L| = 2|1 - x| = 2(1 - x) < 2.\delta \leq 2.\frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

∴ Jadi terbukti limit x mendekati 1 dari kiri hasilnya 2.
Limit kanan
Diketahui:

$$0 < x - 1 < \delta$$

Proses pembuktian:
Ambil sebarang $\varepsilon > 0$. Pilih $\delta > 0$, sehingga untuk $0 < x - 1 < \delta$ berlaku:
$|f(x) - L| = |3 - 3| = 0 < \varepsilon$.
∴ Jadi terbukti limit x mendekati 1 dari kanan hasilnya 3.

Latihan Soal
1. Buktikan $\lim_{x \to 4^-} x + 3 = 7$!
2. Buktikan $\lim_{x \to 4^+} 5\,x = 20$!
3. Buktikan untuk
$$f(x) = \begin{cases} x^2, x < 2 \\ 2x, x \geq 2 \end{cases}$$
limit x mendekati 2 dari kiri hasilnya 4, dan limit x mendekati 2 dari kanan hasilnya juga 4!
4. Diberikan fungsi
$$f(x) = \begin{cases} -1 + x, \text{jika } x < 0 \\ 0, \text{jika } x = 0 \\ 1 + x, \text{jika } x > 0 \end{cases}$$
Buktikan bahwa $\lim_{x \to 0} f(x)$ tidak ada!
5. Misalkan $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ adalah fungsi yang didefinisikan sebagai
$$f(x) = \begin{cases} 1 - x, x \leq 1 \\ 2x, x > 1 \end{cases}$$
Buktikan dengan menggunakan definisi bahwa $\lim_{x \to 1^-} f(x) = 0$ dan $\lim_{x \to 1^+} f(x) = 2$!

Limit di tak hingga

Definisi 14. Diberikan fungsi $f:(a,\infty)\to\mathbb{R}$. Dikatakan bahwa $\lim_{x\to\infty} f(x)=A$ jika untuk setiap $\varepsilon>0$ terdapat bilangan $N=N(\varepsilon)>a$ sedemikian sehingga untuk setiap $x>N$ berlaku

$$|f(x)-A|<\varepsilon$$

Contoh

Periksalah $\lim_{x\to\infty}\left(1-\frac{1}{x^2}\right)$!

Jawab

Ambil sebarang $\varepsilon>0$. Pilih $N>\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}$ sehingga untuk setiap $x>N$ berlaku

$$|f(x)-A|=\left|1-\frac{1}{x^2}-1\right|=\left|-\frac{1}{x^2}\right|=\frac{1}{x^2}<\frac{1}{N^2}<\varepsilon.$$

Jadi $\lim_{x\to\infty}\left(1-\frac{1}{x^2}\right)=1$.

Latihan Soal

1. Periksalah $\lim_{x\to\infty}\frac{2x}{1+x}$!
2. Periksalah $\lim_{x\to\infty}\frac{x^2}{x^2-4}$!

Limit Tak hingga

Definisi 15. Misal $A\subseteq\mathbb{R}$, misal $f:A\to\mathbb{R}$, dan misal $c\in\mathbb{R}$ adalah titik di A.

i. $\lim_{x\to c} f(x)=\infty$, jika untuk setiap $a\in\mathbb{R}$ ada $\delta=\delta(a)>0$ sehingga untuk semua $x\in A$ berlaku $0<|x-c|<\delta\Rightarrow f(x)>a$.

ii. $\lim_{x\to c} f(x)=-\infty$, jika untuk setiap $b\in\mathbb{R}$ ada $\delta=\delta(b)>0$ sehingga untuk semua $x\in A$ berlaku $0<|x-c|<\delta\Rightarrow f(x)<b$.

Latihan Soal

1. Buktikan $\lim_{x\to 0}\frac{1}{x^2}=\infty$!
2. Misal $f(x)=\frac{1}{x}$ untuk $x\neq 0$. Buktikan bahwa
   a) $\lim_{x\to 0} f(x)\neq\infty$
   b) $\lim_{x\to 0} f(x)\neq-\infty$
   c) Gambarlah grafiknya

Fungsi Kontinu

Definisi 16. Fungsi $f(x)$ dikatakan kontinu di titik $x=c$ jika:

$$\forall\varepsilon>0,\exists\delta>0\ni|x-c|<\delta\Rightarrow|f(x)-f(c)|<\varepsilon.$$

Latihan Soal

1. Buktikan bahwa $f(x)=2x+3$ kontinu di titik $x=c$!
2. Buktikan bahwa $f(x)=|x|$ kontinu di setiap titik !
3. Misalkan $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ didefinisikan sebagai

$$f(x)=\begin{cases}x, x\leq 1\\ \frac{3}{2}, x>1\end{cases}$$

   Buktikan bahwa $f(x)$ tidak kontinu di titik $x=1$!

Turunan

Definisi 17. Fungsi $f(x)$ mempunyai turunan di titik c jika

$$\lim_{x\to c}\frac{f(x)-f(c)}{x-c}$$

Contoh

1. Misalkan $f(x) = x^2$, tentukan turunan f di titik $x = 1$!

   Jawab

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^2-1}{x-1} = \lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(x+1)}{x-1} = \lim_{x\to 1} x+1 = 1+1 = 2$$

Latihan Soal

1. Misalkan $f(x) = x^2 + x - 1$, dengan menggunakan definisi tentukan turunan fungsi f di titik $x = 1$!
2. Misalkan $f(x) = |x|$, tentukan turunan f di titik $x = 0$!

Integral Riemann

Jumlah Riemann

Partisi P pada interval $[a, b]$ adalah himpunan

$$P = \{a = x_0, x_1, x_2, \dots, x_n = b\}$$

dimana

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n = b.$$

Norm partisi P adalah

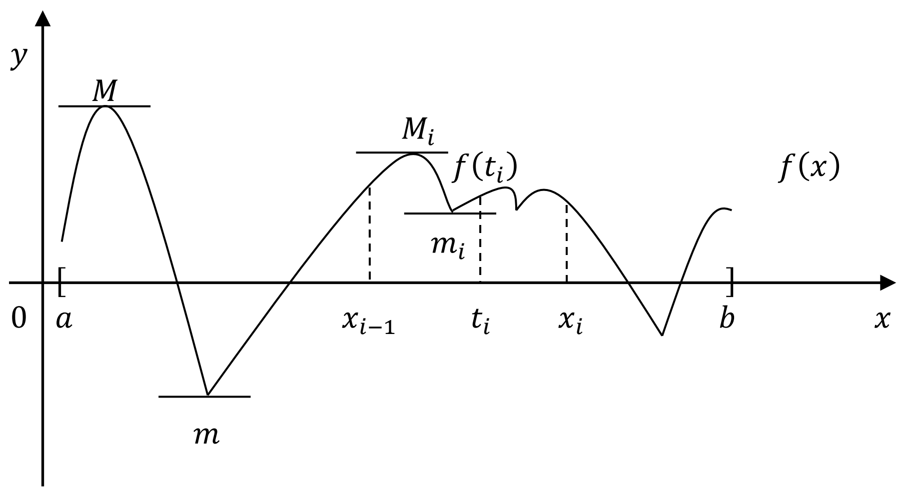
$\|P\| = maks\{(x_i - x_{i-1}) | 1 \le i \le n\}$.

$\mathcal{P}[a, b] = \{P | P \text{ adalah partisi pada } [a, b]\}$.

Misalkan $P_1, P_2 \in \mathcal{P}[a, b]$. Jika setiap anggota P_1 menjadi anggota P_2, ditulis $P_1 \subset P_2$. Dalam hal ini P_2 disebut penghalus (*finer*) P_1. Mudah dipahami bahwa jika $P_1 \subset P_2$ maka $\|P_1\| \ge \|P_2\|$.

Contoh

1. Pada interval $[0,1]$ dibuat dua buah partisi yaitu $P_1 = \left\{0, \frac{1}{8}, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, 1\right\}$ dengan $\|P_1\| = \frac{1}{2}$ dan $P_2 = \left\{0, \frac{1}{8}, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{5}{8}, \frac{3}{4}, 1\right\}$ dengan $\|P_2\| = \frac{1}{4}$. Terlihat bahwa $P_1 \subset P_2$ dan $\|P_1\| = \frac{1}{2} > \frac{1}{4} = \|P_2\|$.
2. Jika $I = [0,4]$, berapakan nilai norm dari partisi berikut
   a. $P_1 = \{0, 1, 2, 4\}$
   b. $P_2 = \left\{0, \frac{1}{2}, \frac{5}{2}, \frac{7}{2}, 4\right\}$



$m \le m_i \le f(t_i) \le M_i \le M$

$M = Sup\{f(x) | x \in [a, b]\}$

$m = Inf\{f(x) | x \in [a, b]\}$

$M_i = Sup\{f(t_i) | t_i \in [x_{i-1}, x_i]\}$

$m_i = Inf\{f(t_i) | t_i \in [x_{i-1}, x_i]\}$

Jumlah Riemann Bawah

$$L(f,P) = \sum_{i=1}^{n} m_i(x_i - x_{i-1})$$

Jumlah Riemann

$$S(f,P) = \sum_{i=1}^{n} f(t_i)(x_i - x_{i-1})$$

Jumlah Riemann Atas

$$U(f,P) = \sum_{i=1}^{n} M_i(x_i - x_{i-1})$$

Perhatikan bahwa
$L(f,P) \leq S(f,P) \leq U(f,P)$.

Integral Riemann
Fungsi $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ dapat dibentuk himpunan-himpunan
$\bar{R}[a,b] = \{U(f,P) | P \in \mathcal{P}[a,b]\}$
$\underline{R}[a,b] = \{L(f,P) | P \in \mathcal{P}[a,b]\}$

Teorema 7. Jika $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ terbatas pada $[a,b]$, maka himpunan $\bar{R}[a,b]$ terbatas ke bawah dan himpunan $\underline{R}[a,b]$ terbatas ke atas.

Definisi 18. Diberikan fungsi $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ terbatas pada $[a,b]$, maka:
1. Infimum (batas bawah terbesar) dari $\bar{R}[a,b]$ yaitu
$$I = \int_a^{\bar{b}} f(t)dt = \int_a^{\bar{b}} f$$
2. Supremum (batas atas terkecil) dari $\underline{R}[a,b]$ yaitu
$$J = \int_{\underline{a}}^{b} f(t)dt = \int_{\underline{a}}^{b} f$$
3. Jika $I = J$ maka f dikatakan terintegral Riemann pada $[a,b]$ ditulis
$$\int_a^b f(t)dt = \int_a^b f$$

Teorema 8. Diberikan fungsi $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ terbatas pada $[a,b]$. Fungsi f terintegral Riemann pada $[a,b]$ jika dan hanya jika untuk setiap $\varepsilon > 0$ terdapat partisi $P \in \mathcal{P}[a,b]$ sehingga berlaku
$$U(f,P) - L(f,P) < \varepsilon.$$

Contoh
1. Fungsi $f: [-1,2] \to \mathbb{R}$ didefinisikan sebagai
$$f(x) = \begin{cases} -1, & -1 \leq x < 0 \\ \frac{1}{2}, & x = 0 \\ 1, & 0 < x < 1 \\ \frac{1}{2}, & 1 \leq x \leq 2 \\ \frac{3}{2}, & x = 2 \end{cases}$$
Buktikan bahwa f terintegral Riemann pada $[-1,2]$ dan hitung $\int_{-1}^{2} f(x)dx$!