

MODUL

KALKULUS 2



Disusun Oleh :

AHMAD KHAIRUL UMAM, S.Si., M.Si. (0711129003)

PROGRAM STUDI MATEMATIKA
FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
UNIVERSITAS BILLFATH
L A M O N G A N
2021

DAFTAR ISI

Hamalan Sampul	i
Daftar Isi	ii
BAB I. FUNGSI TRANSENDEN	
A. Fungsi Logaritma Asli	1
B. Fungsi Eksponensial Asli.....	1
C. Fungsi Logaritma dan Eksponensial Umum.....	2
BAB II. TEKNIK INTEGRASI	
A. Integral Parsial	4
B. Integral Trigonometri	4
C. Substitusi Trigonometri.....	4
BAB III. APLIKASI INTEGRAL	
A. Luas Daerah Bidang Rata	6
B. Volume Benda.....	6
C. Panjang Kurva Bidang	7
BAB IV. BENTUK TAK TENTU DAN INTEGRAL TAK WAJAR	
A. Bentuk Tak Tentu.....	8
B. Integral Tak Wajar	9
Daftar Pustaka	10

BAB I

FUNGSI TRANSENDEN

A. Fungsi Logaritma Asli

Definisi. Fungsi logaritma asli dinyatakan sebagai \ln dan didefinisikan oleh

$$\ln x = \int_1^x \frac{1}{t} dt, x > 0$$

Daerah asal fungsi logaritma asli adalah himpunan bilangan real positif.

Turunan Fungsi Logaritma Asli

Definisi. Jika $u = f(x) > 0$ dan jika f terdifferensialkan, maka

$$\frac{d(\ln u)}{dx} = \frac{1}{u} \cdot \frac{du}{dx}$$

Contoh

1. Carilah turunan dari $y = \ln \sqrt{x}$!

Jawab

Misalkan $u = \sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}$. Maka

$$\frac{d(\ln \sqrt{x})}{dx} = \frac{1}{x^{\frac{1}{2}}} \cdot \frac{d(x^{\frac{1}{2}})}{dx} = \frac{1}{x^{\frac{1}{2}}} \cdot \frac{1}{2} \cdot x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2x}$$

Latihan Soal

1. Tentukan turunan dari $y = \ln(x^2 + 3x + \pi)$!
2. Carilah turunan dari $y = \ln(x - 4)^3$!

B. Fungsi Eksponensial Asli

Definisi. Invers \ln disebut fungsi eksponensial asli dan dinyatakan oleh e . Jadi

$$x = e^y \Leftrightarrow y = \ln x.$$

Huruf e menyatakan bilangan real positif unik sedemikian sehingga $\ln e = 1$. Bilangan e adalah bilangan Euler dimana nilainya $e \approx 2,718 \dots$

Turunan Fungsi Eksponensial Asli

Definisi. Jika $u = f(x)$ terdifferensialkan, maka

$$\frac{d(e^u)}{dx} = \frac{du}{dx} \cdot e^u$$

Contoh

1. Carilah turunan dari $y = e^{\sqrt{x}}$!

Jawab

Misalkan $u = \sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}$. Maka

$$\frac{d(e^{\sqrt{x}})}{dx} = \frac{d(\sqrt{x})}{dx} \cdot e^{\sqrt{x}} = \frac{1}{2} \cdot x^{-\frac{1}{2}} \cdot e^{\sqrt{x}} = \frac{e^{\sqrt{x}}}{2\sqrt{x}}.$$

Integral Fungsi Eksponensial Asli

Definisi. Rumus turunan $\frac{d(e^x)}{dx} = e^x$ secara otomatis menghasilkan rumus integral $\int e^x dx = e^x + C$. Dengan u menggantikan x menjadi

$$\int e^u dx = e^u + C.$$

Contoh

1. Hitunglah $\int e^{-4x} dx$!

Jawab

Misalkan $u = -4x$, sehingga $du = -4dx$. Maka

$$\int e^{-4x} dx = -\frac{1}{4} \int e^{-4x} (-4dx) = -\frac{1}{4} \int e^u du = -\frac{1}{4} e^u + C = -\frac{1}{4} e^{-4x} + C.$$

Latihan Soal

1. Carilah turunan dari $y = e^{x+2}$!
2. Tentukan turunan dari $y = e^{\sqrt{x+2}}$!
3. Hitunglah $\int e^{3x+1} dx$!
4. Carilah integral dari $\int_0^1 e^{2x+3} dx$!

C. Fungsi Logaritma dan Eksponensial Umum

Definisi. Untuk $a > 0$ dan bilangan real sebarang x ,

$$a^x = e^{x \ln a}.$$

Aturan Fungsi Eksponensial Umum

Definisi.

$$\frac{d(a^x)}{dx} = (\ln a) \cdot a^x$$

$$\int a^x dx = \left(\frac{1}{\ln a} \right) \cdot a^x + C, a \neq 1.$$

Contoh

1. Carilah turunan dari $\frac{d(3^{\sqrt{x}})}{dx}$!

Jawab

$$\frac{d(3^{\sqrt{x}})}{dx} = (\ln 3) \cdot \frac{d(\sqrt{x})}{dx} \cdot 3^{\sqrt{x}} = \frac{(\ln 3) \cdot 3^{\sqrt{x}}}{2\sqrt{x}}.$$

2. Carilah integral dari $\int 2^{-x} dx$!

Jawab

$$\int 2^{-x} dx = \left(\frac{1}{\ln 2}\right) \cdot \left(\frac{1}{-1}\right) \cdot 2^{-x} + C = \left(-\frac{1}{\ln 2}\right) \cdot 2^{-x} + C.$$

Aturan Fungsi Logaritma Umum

Definisi.

$$\frac{d(\log_a x)}{dx} = \frac{1}{(\ln a) \cdot x}.$$

Contoh

1. Tentukan turunan dari $y = \log_{10}(x^4 + 13)$!

Jawab

$$\frac{d(\log_{10}(x^4 + 13))}{dx} = \frac{1}{(\ln 10)} \cdot \frac{4x^3}{(x^4 + 13)} = \frac{4x^3}{(\ln 10) \cdot (x^4 + 13)}.$$

Latihan Soal

1. Tentukan turunan dari $y = 6^{2x}$!
2. Hitunglah integral dari $\int 10^{5x-1} dx$!
3. Carilah turunan dari $y = \log_2(x^2 + 1)$!

BAB II

TEKNIK INTEGRASI

A. Integral Parsial

Definisi. Misalkan $u = f(x)$ dan $v = g(x)$. Maka

$$\int u dv = uv - \int v du.$$

Contoh

1. Tentukan $\int \ln x dx$!

Jawab

Misalkan $u = \ln x$ dan $v = x$. Untuk $du = \frac{1}{x} dx$ dan $dv = dx$. Maka

$$\int u dv = uv - \int v du = (\ln x) \cdot x - \int x \left(\frac{1}{x} dx \right) = x \ln x - \int 1 dx = x \ln x - x + C.$$

Latihan Soal

1. Tentukan $\int x \cos 5x dx$!
2. Carilah integral dari $\int te^{-3t} dt$!

B. Integral Trigonometri

Contoh

1. Tentukan integral dari $\int \cos^3 x dx$!

Jawab

Kita tahu bahwa $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ atau bisa ditulis $\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$. Kemudian, misalkan $u = \sin x$ maka $du = \cos x dx$.

$$\begin{aligned} \int \cos^3 x dx &= \int \cos^2 x \cdot \cos x dx = \int (1 - \sin^2 x) \cdot \cos x dx = \int (1 - u^2) du \\ &= u - \frac{1}{3} u^3 + C = \sin x - \frac{1}{3} \sin^3 x + C. \end{aligned}$$

Latihan Soal

1. Hitunglah integral $\int \tan^2 x dx$!
2. Carilah integral dari $\int \sin^2 x \cos^3 x dx$!

C. Substitusi Trigonometri

Tabel Substitusi Trigonometri

Bentuk	Substitusi	Identitas
$\sqrt{a^2 - x^2}$	$x = a \sin \theta, -\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$	$1 - \sin^2 \theta = \cos^2 \theta$
$\sqrt{a^2 + x^2}$	$x = a \tan \theta, -\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}$	$1 + \tan^2 \theta = \sec^2 \theta$

$\sqrt{x^2 - a^2}$	$x = a \sec \theta, 0 \leq \theta < \frac{\pi}{2}$ atau $\pi \leq \theta < \frac{3\pi}{2}$	$\sec^2 \theta - 1 = \tan^2 \theta$
--------------------	--	-------------------------------------

Contoh

1. Hitunglah integral dari $\int \frac{\sqrt{9-x^2}}{x^2} dx$!

Jawab

Misalkan $x = 3 \sin \theta$ dimana $-\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$. Maka $dx = 3 \cos \theta d\theta$ dan

$$\sqrt{9 - x^2} = \sqrt{9 - 9 \sin^2 \theta} = \sqrt{9 \cos^2 \theta} = 3|\cos \theta| = 3 \cos \theta.$$

$$\begin{aligned} \int \frac{\sqrt{9 - x^2}}{x^2} dx &= \int \frac{3 \cos \theta}{9 \sin^2 \theta} 3 \cos \theta d\theta = \int \frac{\cos^2 \theta}{\sin^2 \theta} d\theta = \int \cot^2 \theta d\theta = \int (\csc^2 \theta - 1) d\theta \\ &= -\cot \theta - \theta + C. \end{aligned}$$

Latihan Soal

1. Tentukan integral dari $\int \frac{1}{x^2 \sqrt{4-x^2}} dx$!
2. Carilah integral dari $\int \frac{x^3}{\sqrt{x^2+4}} dx$!

BAB III

APLIKASI INTEGRAL

A. Luas Daerah Bidang Rata

Definisi. Diberikan fungsi $f(x)$ dan $g(x)$ dimana $f(x) \geq g(x)$. Maka luas daerah diantara dua fungsi tersebut untuk $a \leq x \leq b$ adalah

$$L = \int_a^b [f(x) - g(x)] dx.$$

Definisi. Diberikan fungsi $f(y)$ dan $g(y)$ dimana $f(y) \geq g(y)$. Maka luas daerah diantara dua fungsi tersebut untuk $c \leq x \leq d$ adalah

$$L = \int_c^d [f(y) - g(y)] dy.$$

Contoh

1. Carilah luas daerah di bawah $y = x^4 - 2x^3 + 2$ diantara $x = -1$ dan $x = 2$!

Jawab

$$\begin{aligned} L &= \int_{-1}^2 (x^4 - 2x^3 + 2) dx = \left[\frac{x^5}{5} - \frac{x^4}{2} + 2x \right]_{-1}^2 = \left(\frac{32}{5} - \frac{16}{2} + 4 \right) - \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{2} - 2 \right) = \frac{51}{10} \\ &= 5,1. \end{aligned}$$

Latihan Soal

1. Carilah luas daerah yang dibatasi $y = 3 - \frac{1}{3}x^2$ dan $y = 0$ diantara $x = 0$ dan $x = 3$!
2. Tentukan luas daerah yang dibatasi $y = 5x - x^2$ dan $y = 0$ diantara $x = 1$ dan $x = 3$!

B. Volume Benda

Definisi. Diberikan fungsi $f(x)$ dan $g(x)$ dimana $f(x) \geq g(x)$. Maka volume benda putar diantara dua fungsi tersebut untuk $a \leq x \leq b$ dimana diputar terhadap sumbu- x adalah

$$V = \pi \int_a^b [f(x)]^2 - [g(x)]^2 dx.$$

Definisi. Diberikan fungsi $f(y)$ dan $g(y)$ dimana $f(y) \geq g(y)$. Maka volume benda putar diantara dua fungsi tersebut untuk $c \leq x \leq d$ dimana diputar terhadap sumbu- y adalah

$$V = \pi \int_c^d [f(y)]^2 - [g(y)]^2 dy.$$

Contoh

1. Carilah volume benda putar yang terbentuk dari pemutaran daerah yang dibatasi oleh kurva $y = x^3$, sumbu- y dan garis $y = 3$ mengelilingi sumbu- y !

Jawab

Perhatikan bahwa $y = x^3$ setara dengan $x = \sqrt[3]{y}$.

$$V = \pi \int_0^3 y^{\frac{2}{3}} dy = \pi \left[\frac{3}{5} y^{\frac{5}{3}} \right]_0^3 = \pi \frac{9\sqrt[3]{9}}{5} \approx 11,76.$$

Latihan Soal

1. Tentukan volume benda putar yang terbentuk dari pemutaran daerah yang dibatasi oleh kurva $y = \frac{x^2}{\pi}$, $x = 4$ dan $y = 3$ mengelilingi sumbu- x !
2. Carilah volume benda putar yang terbentuk dari pemutaran daerah yang dibatasi oleh kurva $x = y^2$, $x = 0$ dan $y = 3$ mengelilingi sumbu- y !

C. Panjang Kurva Bidang

Definisi. Jika kurva diberikan oleh $y = f(x)$, $a \leq x \leq b$, maka panjang kurva adalah

$$L = \int_a^b \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} dx.$$

Definisi. Jika kurva diberikan oleh $x = f(y)$, $c \leq y \leq d$, maka panjang kurva adalah

$$L = \int_c^d \sqrt{1 + \left(\frac{dx}{dy}\right)^2} dy.$$

Contoh

1. Carilah panjang ruas garis dari $A(0,1)$ ke $B(5,13)$!

Jawab

Persamaan garis yang dimaksud adalah $y = \frac{12}{5}x + 1$, sehingga $\frac{dy}{dx} = \frac{12}{5}$. Jadi panjang kurva adalah

$$L = \int_0^5 \sqrt{1 + \left(\frac{12}{5}\right)^2} dx = \int_0^5 \sqrt{\frac{5^2 + 12^2}{5^2}} dx = \frac{13}{5} \int_0^5 1 dx = \left[\frac{13}{5}x \right]_0^5 = 13.$$

Latihan Soal

1. Tentukan panjang kurva $y = 4x^{\frac{3}{2}}$ antara $x = \frac{1}{3}$ dan $x = 5$!
2. Tentukan panjang kurva $y = \frac{2}{3}(x^2 + 1)^{\frac{3}{2}}$ antara $x = 1$ dan $x = 2$!

BAB IV

BENTUK TAK TENTU DAN INTEGRAL TAK WAJAR

A. Bentuk Tak Tentu

Aturan L'Hopital untuk Bentuk Tak Tentu $\frac{0}{0}$

Definisi. Anggap bahwa $\lim_{x \rightarrow u} f(x) = \lim_{x \rightarrow u} g(x) = 0$. Jika $\lim_{x \rightarrow u} \left[\frac{f'(x)}{g'(x)} \right]$ ada yaitu bilangan berhingga atau bilangan tak berhingga (bilangan tak berhingga yaitu $-\infty$ atau $+\infty$), maka

$$\lim_{x \rightarrow u} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow u} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Contoh

1. Carilah nilai limit dari $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 9}{x^2 - x - 6}$!

Jawab

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 9}{x^2 - x - 6} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{2x}{2x - 1} = \frac{6}{5}.$$

Latihan soal

1. Tentukan nilai limit dari $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x - \sin x}{x}$!
2. Carilah nilai limit dari $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin 2x}{\tan x}$!

Aturan L'Hopital untuk Bentuk Tak Tentu $\frac{\infty}{\infty}$

Definisi. Anggap bahwa $\lim_{x \rightarrow u} |f(x)| = \lim_{x \rightarrow u} |g(x)| = \infty$. Jika $\lim_{x \rightarrow u} \left[\frac{f'(x)}{g'(x)} \right]$ ada yaitu bilangan berhingga atau bilangan tak berhingga, maka

$$\lim_{x \rightarrow u} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow u} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Contoh

1. Tentukan nilai limit dari $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{e^x}$!

Jawab

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{e^x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{e^x} = 0.$$

Latihan Soal

1. Carilah nilai limit dari $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln x^{10000}}{x}$!
2. Tentukan nilai limit dari $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^{10000}}{e^x}$!

Definisi. Beberapa bentuk tak tentu yang lain yaitu $\infty - \infty$, $0 \cdot \infty$, 0^0 , ∞^0 dan 1^∞ .

B. Integral Tak Wajar

Definisi.

$$\int_{-\infty}^b f(x) dx = \lim_{a \rightarrow -\infty} \int_a^b f(x) dx$$

$$\int_a^{+\infty} f(x) dx = \lim_{b \rightarrow \infty} \int_a^b f(x) dx.$$

Contoh

1. Tentukan nilai integral dari $\int_{-\infty}^{-1} x e^{-x^2} dx$!

Jawab

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{-1} x e^{-x^2} dx &= \lim_{a \rightarrow -\infty} \int_a^{-1} x e^{-x^2} dx = \lim_{a \rightarrow -\infty} \left[-\frac{1}{2} \int_a^{-1} e^{-x^2} (-2x dx) \right] = \lim_{a \rightarrow -\infty} \left[-\frac{1}{2} e^{-x^2} \right]_a^{-1} \\ &= \lim_{a \rightarrow -\infty} \left[-\frac{1}{2} e^{-1} + \frac{1}{2} e^{-a^2} \right] = -\frac{1}{2e}. \end{aligned}$$

Latihan Soal

1. Carilah nilai integral dari $\int_{100}^{\infty} e^x dx$!
2. Tentukan nilai integral dari $\int_{-\infty}^{-5} \frac{1}{x^4} dx$!

DAFTAR PUSTAKA

- Purcell E. J., Varberg D., Rigdon S. E. 2007. *Calculus, Ninth edition*. USA. Pearson, Prentice Hall Inc.
- Stewart J. 2012. *Calculus seventh Edition*. USA. Brooks/Cole, Cengage Learning.
- Varberg D., Purcell E. J. dan Rigdon S. E. 2010. *Kalkulus Edisi Kesembilan Jilid 1*. Jakarta. Penerbit Erlangga.