Ahmad Khairul Umam, S.Si., M.Si.
Prodi Matematika, Universitas Billfath

ANALISIS REAL 1

Himpunan

Proposisi : Kalimat deklaratif yang bernilai benar atau salah, tetapi tidak dapat sekaligu keduanya.

Aksioma : Proposisi yang diasumsikan benar. Aksioma tidak memerlukan pembuktian kebenaran lagi.

Teorema : Proposisi yang sudah terbukti benar. Bentuk khusus dari teorema adalah lemma dan corolarry.

Lemma : Teorema sederhana yang digunakan dalam pembuktian teorema lain.

Corolarry(akibat) : Teorema yang dapat dibentuk langsung dari teorema yang telah dibuktikan.

Himpunan(set) : Kumpulan objek-objek yang berbeda.

Simbol-simbol baku:

$\mathbb{N}$ = Himpunan bilangan asli.

$\mathbb{Z}$ = Himpunan bilangan bulat.

$\mathbb{R}$ = Himpunan bilangan real.

$\mathbb{Q}$ = Himpunan bilangan rasional.

$\mathbb{C}$ = Himpunan bilangan kompleks.

Notasi pembentuk himpunan : $\{x|\text{ syarat yang harus dipenuhi oleh } x\}$.

Tanda '|' dibaca dimana atau sedemikian sehingga.

Algoritma : urutan logis langkah-langkah penyelesaian masalah yang disusun sistematis.

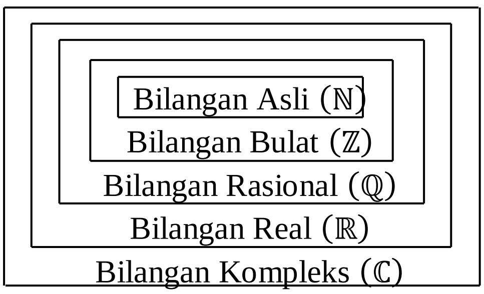
Kuantor Universal : $\forall x$ (untuk setiap atau untuk semua)

Kuantor Eksistensial : $\exists x$ (ada atau beberapa)

Negasi/ingkaran:

$\sim [\forall x, p(x)] = \exists x, \sim p(x)$

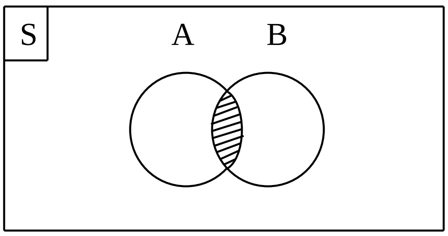
$\sim [\exists x, p(x)] = \forall x, \sim p(x)$



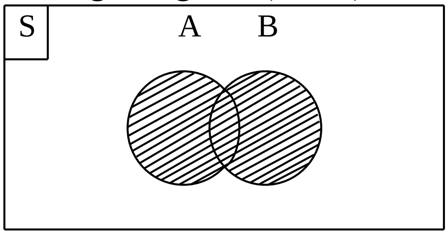
Definisi 1. Dua himpunan dikatakan sama jika mereka memuat elemen-elemen yang sama. Jika himpunan A dan B sama, maka dinotasikan dengan A=B.

Operasi pada Himpunan:

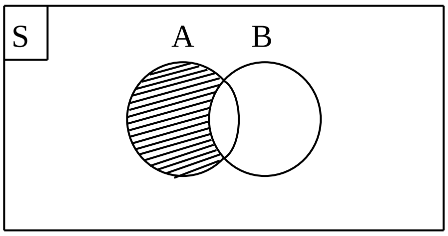
1. **A irisan B ($A \cap B$)**



2. A gabungan B ($A \cup B$)



3. A minus B ($A - B$)atau ($A \setminus B$)



Teorema 1. Jika A, B, C adalah sebarang himpunan, maka
1. $A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \cap (A \setminus C)$
2. $A \setminus (B \cap C) = (A \setminus B) \cup (A \setminus C)$

Bukti
1. Jika x di dalam $A \setminus (B \cup C)$ maka x di dalam A tetapi tidak di $(B \cup C)$. Akibatnya x di A tetapi tidak di B dan tidak di C. Berarti $x \in A \setminus B$ dan $x \in A \setminus C$. Jadi $x \in (A \setminus B) \cap (A \setminus C)$.
2. Jika x di dalam $A \setminus (B \cap C)$ maka x di dalam A tetapi tidak di $(B \cap C)$. Bisa juga ada x di A yang juga ada di C tetapi tidak di B. Selanjutnya, bisa juga ada x di A yang juga ada di B tetapi tidak di C. Berarti $x \in A \setminus B$ atau $x \in A \setminus C$. Jadi $x \in (A \setminus B) \cup (A \setminus C)$.

Contoh
1. Diberikan sebarang himpunan A dan B, tunjukkan bahwa himpunan $A \cap B$ dan $A \setminus B$ adalah saling asing!

Bukti
Jika x ada di dalam $A \cap B$, maka x di dalam A dan di dalam B. Untuk x yang ada di dalam A tetapi tidak ada di dalam B berarti tidak berada di dalam $A \cap B$. Jika x ada di dalam $A \setminus B$ maka x di dalam A tetapi tidak ada di dalam B. Karena tidak ada x di dalam $A \cap B$ dan juga di dalam $A \setminus B$ maka $A \cap B$ dan $A \setminus B$ adalah saling asing.

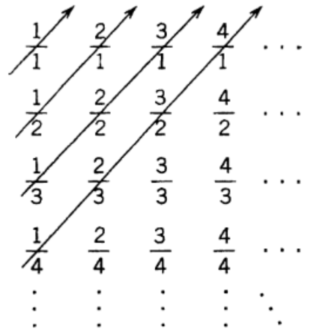
Definisi 2. Himpunan A dan B dikatakan ekivalen (mempunyai kardinalitas yang sama) jika terdapat suatu fungsi korespondensi 1-1 dari A kepada B, ditulis A ~ B.

Definisi 3. Diberikan suatu himpunan sebarang A, maka:
1. A dikatakan berhingga jika $A \sim J_n$
2. A dikatakan tak berhingga jika A bukan himpunan berhingga
3. A dikatakan terbilang jika $A \sim \mathbb{N}$
4. A dikatakan tak terbilang jika A bukan himpunan yang berhingga atau yang terbilang

Contoh
1. Buktikan himpunan bilangan asli kurang dari 100 adalah himpunan berhingga!
2. Buktikan himpunan bilangan real $\mathbb{R}$ himpunan tak berhingga!
3. Buktikan himpunan $C = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$ adalah himpunan terbilang!
4. Buktikan bahwa himpunan semua bilangan bulat!
5. Buktikan himpunan semua bilangan rasional $\mathbb{Q}$ terbilang!

Jawab

1. Himpunan bilangan asli kurang dari 100 yaitu
$$A = \{1, 2, 3, \dots, 99\}.$$
Terlihat himpunan A berhingga.
2. Karena tidak ada batas atas dari bilangan real $\mathbb{R}$.
3. Dibentuk fungsi $f\colon \mathbb{N} \to C$ dengan $f(n) = n - 1$ untuk setiap $n \in \mathbb{N}$.
4. Dibentuk fungsi $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$ dengan
$$f(x) = \begin{cases} \frac{n}{2} & \text{, untuk } n \text{ genap} \\ \frac{-(n-1)}{2} & \text{, untuk } n \text{ ganjil} \end{cases}$$
5. Terbilang, karena bisa dibuat bentuk seperti ini



Fungsi

Definisi 4. Diberikan fungsi $f\colon A \to B$, maka:

1. Fungsi f dikatakan injektif (satu-satu) jika untuk setiap $x_1 \neq x_2$, maka $f(x_1) \neq f(x_2)$.
2. Fungsi f dikatakan surjektif (pada/onto) jika $f(A) = B$.
3. Fungsi f dukatakan bijektif jika f fungsi injektif dan surjektif.

Cara membuktikan:

1. Fungsi Injektif : untuk setiap x_1, x_2 di A, jika $f(x_1) = f(x_2)$, maka $x_1 = x_2$.
2. Fungsi Surjektif : untuk setiap $b \in B$ terdapat paling sedikit satu $x \in A$ sedemikian sehingga $f(x) = b$.

Contoh

1. Diberikan $f(x) = \frac{x}{x-1}$ dimana $x \in \mathbb{R}$, $x \neq 1$. Buktikan bahwa $f(x)$ bijektif!
2. Apakah fungsi $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dengan $f(x) = x^2$ merupakan fungsi surjektif? Berikan alasan!
3. Berikan contoh dua fungsi f dan g pada $\mathbb{R}$ ke $\mathbb{R}$ sehingga$f \neq g$ tetapi $f \circ g = g \circ f$!

Bukti

1. Pertama akan dibuktikan $f(x)$ injektif. Anggap $f(x_1) = f(x_2)$, sehingga
$$\frac{x_1}{x_1 - 1} = \frac{x_2}{x_2 - 1}$$
$$x_1(x_2 - 1) = x_2(x_1 - 1)$$
$$x_1x_2 - x_1 = x_1x_2 - x_2$$
$$x_1 = x_2$$
(Terbukti)
Kedua akan dibuktikan $f(x)$ surjektif. Nilai fungsi f ditulis $y = \frac{x}{x-1}$, $x \neq 1$ dan dapat ditulis menjadi
$$y(x - 1) = x$$
$$yx - 1 = x$$

$$xy - x = 1$$
$$x(y-1) = 1$$
$$x = \frac{1}{(y-1)}, y \neq 1$$

Karena semua nilai $y \in \mathbb{R}, y \neq 1$ merupakan hasil dari $f(x)$ maka terbukti $f(x)$ surjektif.

2. Tidak. Karena ada $y < 0 \in \mathbb{R}$ dimana $f(x) \neq y$.
3. $$f(x) = 3x + 5$$
$$g(x) = \frac{4x+5}{2}$$

Latihan Soal

1. Diberikan $f(x) = 2x$ dimana $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Buktikan bahwa $f(x)$ bijektif!
2. Diberikan $f(x) = 5x + 2$ dimana $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Buktikan bahwa $f(x)$ bijektif!

Induksi Matematika

Cara membuktikan menggunakan induksi matematika:

1. $n = 1$ Benar
2. Misal $n = k$ Benar

   Maka $n = k + 1$ Benar

Contoh

1. Buktikan bahwa

$$1 + 2 + 3 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

   Untuk setiap $n \geq 1$!

Jawab

- $n = 1$

  $1 = \frac{1(1+1)}{2}$

  $1 = \frac{1(2)}{2}$

  $1 = 1$ (Benar)
- $n = k$

  $1 + 2 + 3 + \cdots + k = \frac{k(k+1)}{2}$ (Benar)

  $n = k + 1$

$$1 + 2 + 3 + \cdots + k + (k+1) = \frac{(k+1)\big((k+1)+1\big)}{2}$$
$$\frac{k(k+1)}{2} + (k+1) = \frac{(k+1)(k+2)}{2}$$
$$\frac{k(k+1)}{2} + \frac{2(k+1)}{2} = \frac{(k+1)(k+2)}{2}$$
$$\frac{(k+1)(k+2)}{2} = \frac{(k+1)(k+2)}{2} \text{ (Benar)}$$

(Terbukti)

Latihan Soal

1. Buktikan bahwa

$$1 + 3 + 5 + \cdots + (2n-1) = n^2$$

   untuk setiap $n \in \mathbb{N}$!

2. Buktikan melalui induksi matematika

$$1(2) + 2(3) + \cdots + n(n+1) = \frac{n(n+1)(n+2)}{3}$$

untuk $n \geq 1$!

Bilangan Real

Definisi 5. Diberikan himpunan terurut S dengan urutan $\leq$ dan $E \subset S$. Himpunan E dikatakan terbatas ke atas jika terdapat suatu elemen $m \in S$ sehingga untuk setiap $x \in E$ berlaku $x \leq m$. Elemen m disebut batas atas himpunan E.

Definisi 6. Diberikan himpunan terurut S dengan urutan $\leq$ dan $E \subset S$. Himpunan E dikatakan terbatas ke bawah jika terdapat suatu elemen $n \in S$ sehingga untuk setiap $x \in E$ berlaku $x \geq n$. Elemen n disebut batas bawah himpunan E.

Definisi 7. Diberikan himpunan terurut S dengan urutan $\leq$, himpunan $E \subset S$ terbatas ke atas. Suatu elemen $a \in S$ dikatakan **batas atas terkecil** (supremum) himpunan E jika memenuhi ketentuan berikut:

a. a batas atas himpunan E.

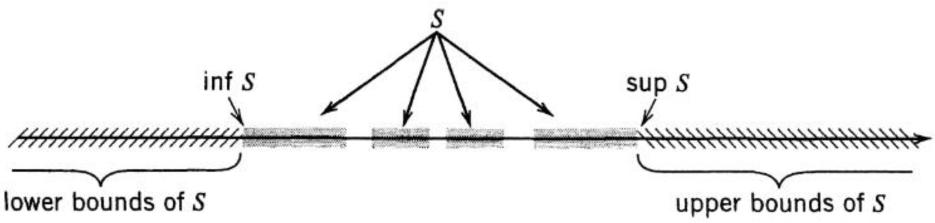
b. Jika p batas atas himpunan E, maka $a \leq p$

Definisi 8. Diberikan himpunan terurut S dengan urutan $\leq$, himpunan $E \subset S$ terbatas ke bawah. Suatu elemen $b \in S$ dikatakan **batas bawah terbesar** (infimum) himpunan E jika memenuhi ketentuan berikut:

a. b batas bawah himpunan E.

b. Jika q batas bawah himpunan E, maka $b \geq q$

Berikut gambar nilai supremum dan infimum:



Contoh

1. Tentukan batas atas $E = \{1, 2, -1, 4, 7\}$!
2. Tentukan Supremum dan Infimum dari himpunan $E = \{1, 2, -1, 4, 7\}$!

Jawab

1. Batas atas E adalah $x \geq 7$.
2. Sup $E = \{7\}$

   Inf $E = \{-1\}$

Latihan Soal

1. Tentukan batas atas dan bawah $A = \left\{\frac{1}{n}, n \in \mathbb{N}\right\}$!
2. Apakah himpunan bilangan asli $\mathbb{N}$ terbatas?
3. Misalkan $A = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 - x - 2 \geq 0\}$ dan $B = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 - 4 < 0\}$. Tentukan:

   a. $A \cap B$

   b. $A \cup B$

   c. $A - B$
4. Misal $A = \{a, b, c, d\}$ dan $B = \{1,2,3,4\}$. Selidiki apakah himpunan pasangan berurutan berikut ini merupakan fungsi atau bukan:

$$h = \{(a,2),(b,2),(c,3),(d,1),(a,1)\}!$$

5. Misalkan $f(x) = x^2$ dimana $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Apakah fungsi f injektif? Jelaskan!
6. Buktikan dengan induksi matematika bahwa $n^3 + 2n$ adalah kelipatan 3 untuk semua $n \geq 1$!
7. Tentukan Supremum dan Infimum dari himpunan $E = \left\{\frac{1}{n}, n \in \mathbb{N}\right\}$! Tentukan juga apakah Supremum dan Infimum berada di dalam E?
8. Tentukan Supremum dan Infimum dari himpunan $S = \{x^2 < 9, x \in \mathbb{R}\}$!
9. Misalkan $A = \left\{\frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{2^n} | n \in \mathbb{N}\right\}$. Buktikan bahwa $\sup A = 1$!

Teorema 2. Jika $a \in \mathbb{R}$ dan $0 \leq a < \varepsilon$ untuk setiap $\varepsilon > 0$, maka $a = 0$.

Bukti

Anggap $a > 0$. Dapat diambil $\varepsilon_0 = \frac{1}{2}a$ dimana $0 < \varepsilon_0 < a$. Hal ini kontradiksi karena seharusnya $a < \varepsilon$ untuk setiap $\varepsilon > 0$. Maka haruslah $a = 0$.

Latihan Soal

1. Tentukan semua bilangan real yang memenuhi ketaksamaan di bawah ini:
   a. $\frac{1}{x} < x$
   b. $\frac{1}{x} < x^2$
2. Buktikan bahwa ketaksamaan
$$2^n > 2n + 1$$
   benar untuk semua bilangan asli $n \geq 3$!
3. Buktikan (Ketaksamaan Bernoulli) jika $x > -1$ maka $(1 + x)^n \geq 1 + nx$ untuk semua $n \in \mathbb{N}$!
4. Tentukan apakah fungsi $f(x) = 3x^2 - 1$ injektif?
5. Tentukan apakah fungsi $g(x) = 2x$ surjektif?
6. Tentukan apakah fungsi $h(x) = x^3$ bijektif?
7. Tentukan Supremum dan Infimum dari himpunan-himpunan berikut:
   a. $S = \{1, 2, 3, 0, 4, 5\}$
   b. $T = (1,3) \cup [4,5) \cup [7,9]$
   c. $M = \{-1 < x \leq 3, x \in \mathbb{R}\}$
   d. $E = \{x^2 \leq 4, x \in \mathbb{R}\}$
8. Tentukan himpunan E dimana $\sup E = \inf E$!
9. Tentukan Supremum dan Infimum dari himpunan-himpunan berikut
   a. $A = \{\sqrt{n}, n \in \mathbb{N}\}$
   b. $B = \left\{\frac{1}{n^2}, n \in \mathbb{N}\right\}$
10. Tentukan juga apakah Supremum dan Infimum berada di dalam himpunan tersebut?

Medan

Definisi 9. Himpunan terurut F yang dilengkapi dengan operasi penjumlahan dan perkalian disebut suatu Medan jika memenuhi:

<u>Aksioma Penjumlahan</u>

J1. Jika $x, y \in$ F, maka $x + y \in$ F

J2. Jika $x, y \in$ F, maka $x + y = y + x$ (komutatif)

J3. Untuk semua $x, y, z \in$ F, maka $(x + y) + z = x + (y + z)$

J4. F memuat elemen 0 sehingga $0 + x = x$, untuk setiap $x \in$ F

J5. Untuk setiap $x \in$ F, terdapat $-x \in$ F dan $x + (-x) = 0$

Aksioma Perkalian

K1. Jika $x, y \in \mathrm{F}$, maka $xy \in \mathrm{F}$

K2. Untuk semua $x, y \in \mathrm{F}$, maka $xy = yx$ (komutatif)

K3. Untuk semua $x, y, z \in \mathrm{F}$, maka $(xy)z = x(yz)$

K4. F memuat elemen $1 \neq 0$ sehingga $1x = x$ untuk setiap $x \in \mathrm{F}$

K5. Jika $x \neq 0 \in \mathrm{F}$, maka terdapat suatu elemen $\frac{1}{x} \in \mathrm{F}$ dan $x\left(\frac{1}{x}\right) = 1$

Hukum Distributif

Untuk setiap $x, y, z \in \mathrm{F}$ berlaku $x(y + z) = xy + xz$.

Proposisi 1. Aksioma-aksioma penjumlahan mengakibatkan berlakunya pernyataan berikut:

i Jika $x + y = x + z$ maka $y = z$

ii Jika $x + y = x$ maka $y = 0$

iii Jika $x + y = 0$ maka $y = -x$

iv $-(-x) = x$

Bukti

i $y = 0 + y = (-x + x) + y = -x + (x + y) = -x + (x + z) = (-x + x) + z = 0 + z = z$

ii Karena $x + y = x$, maka berdasarkan (i) dapat diambil $z = 0$ sehingga $y = 0$

iii Dengan mengambil $z = -x$, bersadarkan (i) diperoleh $y = -x$

iv Dari (iii) jika $x + y = 0$ maka $y = -x$, karena $-x + x = 0$ maka $x = -(-x)$.

Proposisi 2. Aksioma-aksioma perkalian mengakibatkan berlakunya pernyataan berikut:

i Jika $x \neq 0$ dan $xy = xz$ maka $y = z$

ii Jika $x \neq 0$ dan $xy = x$ maka $y = 1$

iii Jika $x \neq 0$ dan $xy = 1$ maka $y = \frac{1}{x}$

iv Jika $x \neq 0$ maka $1/\frac{1}{x} = x$

Bukti

i Karena $x \neq 0$ dan $xy = xz$, maka menurut aksioma perkalian,

$$y = y1 = y\left(x\left(\frac{1}{x}\right)\right) = (yx)\left(\frac{1}{x}\right) = (xy)\left(\frac{1}{x}\right) = (xz)\left(\frac{1}{x}\right) = (zx)\left(\frac{1}{x}\right) = z\left(x\left(\frac{1}{x}\right)\right) = z1 = z$$

ii Karena $xy = x$, maka berdasarkan (i) dapat diambil $z = 1$ sehingga $y = 1$

iii Karena $x \neq 0$ dengan mengambil $z = \frac{1}{x}$, bersadarkan (i) diperoleh $y = \frac{1}{x}$

iv Dari (iii) jika $x \neq 0$ dan $xy = 1$ maka $y = \frac{1}{x}$, karena $\left(\frac{1}{x}\right)x = 1$ maka $x = 1/\frac{1}{x}$.

Proposisi 3. Untuk sebarang $x, y, z \in \mathrm{F}$ berlaku pernyataan-pernyataan berikut:

i $0x = 0$

ii Jika $x \neq 0$ dan $y \neq 0$ maka $xy \neq 0$

iii $(-x)y = -(xy) = x(-y)$

iv $(-x)(-y) = xy$

Bukti

i Menurut aksioma distributif

$0x + 0x = (0 + 0)x = 0x$

Menurut proposisi 1 no.(ii) didapatkan

$0x = 0$

ii Disini akan dibuktikan dengan kontradiktif. Andaikan untuk $x \neq 0$, $y \neq 0$ dan $xy = 0$, maka $1 = \left(\frac{1}{y}\right)y = \left(\frac{1}{y}\right)1y = \left(\frac{1}{y}\right)x\left(\frac{1}{x}\right)y = \left(\frac{1}{y}\right)\left(\frac{1}{x}\right)xy = \left(\frac{1}{y}\right)\left(\frac{1}{x}\right)0 = 0$ atau $1 = 0$, adalah suatu kontradiksi. Jadi pernyataan (ii) benar.

iii Mengingat aksioma distributif, maka $xy + (-x)y = \big(x + (-x)\big)y = 0y = 0$, sehingga menurut proposisi 1 no.(iii) $(-x)y = -xy$. Demikian juga $xy + x(-y) = x\big(y + (-y)\big) = x0 = 0$, sehingga menurut proposisi 1 no.(iii) $x(-y) = -xy$. Jadi terbukti $(-x)y = -(xy) = x(-y)$.

iv Dengan menggunakan (iii) dan proposisi 1 no.(iv) diperoleh
$(-x)(-y) == -\big(x(-y)\big) = -(-xy) = xy$

Definisi 10. Suatu medan F dikatakan medan terurut jika F merupakan himpunan terurut dengan sifat:

i Jika $x, y, z \in$ F dan $y < z$, maka $x + y < x + z$

ii Jika $x, y \in$ F dengan $x > 0$ dan $y > 0$ maka $xy > 0$

Jika $x > 0$ maka x disebut elemen positif, dan jika $x < 0$ maka x disebut elemen negatif.

Proposisi 4. Dalam medan terurut F berlaku pernyataan-pernyataan berikut:

i Jika $x > 0$ maka $-x < 0$ dan sebaliknya

ii Jika $x > 0$ dan $y < z$ maka $xy < xz$

iii Jika $x < 0$ dan $y < z$ maka $xy > xz$

iv Jika $x \neq 0$ maka $x^2 > 0$

v Jika $0 < x < y$ maka $\frac{1}{y} < \frac{1}{x}$

Bukti

i Jika $x > 0$ maka $-x = -x + 0 < -x + x = 0$, jadi $-x < 0$. Jika $x < 0$ maka $-x = -x + 0 > -x + x = 0$, jadi $-x > 0$.

ii Karena $y < z$ maka menurut definisi 10 no. (i) $0 = -y + y < -y + z = z - y$. Karena $x > 0$ maka menurut definisi 10 no. (ii) $x(z - y) > 0$. Untuk $xz = xz - xy + xy = x(z - y) + xy > 0 + xy = xy$. Jadi $xy < xz$.

iii Karena $x < 0$ maka menurut (i) $-x > 0$. Jadi menurut (ii) berlaku $(-x)y < (-x)z$. Selanjutnya berdasarkan proposisi 3 no. (iii) berlaku $-(xy) < -(xz)$, sehingga menurut definisi 10 no. (i) berlaku $0 = xy - xy < xy - xz$ atau $xy > xz$.

iv Jika $x \neq 0$, maka $x > 0$ atau $x < 0$. Untuk $x > 0$ maka menurut definisi 10 no. (ii) berlaku $x.x = x^2 > 0$. Jika $x < 0$ maka menurut (i) $-x > 0$. Berdasarkan proposisi 3 no. (iv) bahwa $(-x)(-x) = x.x = x^2 > 0$.

v Menurut (ii) dan proposisi 3 no. (i) berlaku pernyataan

Jika $y > 0$ dan $z \leq 0$, maka $yz \leq 0$

Jadi pernyataan berikut juga benar

Jika $yz > 0$ dan $y > 0$, maka $z > 0$

Karena $y\left(\frac{1}{y}\right) = 1 > 0$ dan $y > 0$ maka $\frac{1}{y} > 0$. Karena $0 < x < y$ maka $\frac{1}{x} > 0$. Karena $\frac{1}{x} > 0$ dan $\frac{1}{x} > 0$ maka menurut definisi 10 no. (ii) berlaku $\left(\frac{1}{x}\right)\left(\frac{1}{y}\right) > 0$. Dari ketaksamaan $x < y$ diperoleh

$$\left(\frac{1}{x}\right)\left(\frac{1}{y}\right)x < \left(\frac{1}{x}\right)\left(\frac{1}{y}\right)y \text{ atau } \frac{1}{y} < \frac{1}{x}.$$

Nilai Mutlak

Definisi 11. Untuk setiap $x \in \mathbb{R}$ didefinisikan fungsi nilai mutlak

$$|x| = \begin{cases} x, x \geq 0 \\ -x, x < 0 \end{cases}$$

Bentuk $|x|$ disebut nilai mutlak (*absolute value*) dari $x \in \mathbb{R}$ yang nilainya selalu positif.

Teorema 3. Untuk setiap $x, y \in \mathbb{R}$, berlaku:

i $|x| = \sqrt{x^2}$

ii $-|x| \leq x \leq |x|$

iii $|xy| = |x||y|$

iv $|x + y| \leq |x| + |y|$

v $|x| - |y| \leq |x - y|$ dan $|y| - |x| \leq |x - y|$

Bukti

i Jika $x \geq 0$, maka $|x|^2 = x^2$ atau $|x| = \sqrt{x^2}$. Jika $x < 0$, maka $|x|^2 = (-x)^2 = x^2$ atau $|x| = \sqrt{x^2}$.

ii Jika $x \geq 0$, maka $-|x| = -x \leq x \leq |x|$. Jika $x < 0$, maka $-|x| = -(-x) = x \leq -x \leq |x|$.

iii Dari (i) didapat $|xy| = \sqrt{(xy)^2} = \sqrt{x^2y^2} = \sqrt{x^2}\sqrt{y^2} = |x||y|$

iv Dari (i) $|x + y|^2 = (x + y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$

Dari (ii) $\leq x^2 + y^2 + 2|xy|$

Dari (i) dan (iii) $= |x|^2 + |y|^2 + 2|x||y|$

$= (|x| + |y|)^2$

Atau

$|x + y| \leq |x| + |y|$

v $|x| = |x - y + y| \leq |x - y| + |y|$ atau $|x| - |y| \leq |x - y|$. Dengan cara yang sama dapat dibuktikan $|y| - |x| \leq |x - y|$.

Ruang Euclides

Definisi 12. Untuk setiap bilangan positif k, dibentuk himpunan pasangan terurut-k (k-*tuple*) dari bilangan-bilangan real.

$$\mathbb{R}^k = \{\bar{x} = (x_1, x_2, \dots, x_k) | x_j \in \mathbb{R}, 1 \leq j \leq k\}$$

Bilangan-bilangan real $x_1, x_2, \dots, x_k$ disebut koordinat.

Definisi 13. Untuk setiap $\bar{x} = (x_1, x_2, \dots, x_k)$ di dalam $\mathbb{R}^k$ didefinisikan fungsi $\|.\|: \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$, dengan

$$\|\bar{x}\| = \left(\sum_{j=1}^{k} x_j^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

yang disebut Norma vektor $\bar{x}$. Fungsi $\|.\|$ disebut Norm.

Perluasan Sistem Bilangan Real

Definisi 14. Sistem bilangan real yang diperluas dinotasikan dengan $\mathbb{R}^*$. Sistem bilangan real yang dperluas didefinisikan

$$-\infty \leq x^* \leq +\infty, \text{untuk setiap } x^* \in \mathbb{R}^*.$$

Sifat-sifat:

i Untuk setiap bilangan real $x \in \mathbb{R}$, berlaku:

- $x + \infty = \infty$
- $x - \infty = -\infty$

- $\dfrac{x}{+\infty} = \dfrac{x}{-\infty} = 0$

ii Jika $x > 0$, maka
- $x(+\infty) = +\infty$
- $x(-\infty) = -\infty$

iii Jika $x < 0$, maka
- $x(+\infty) = -\infty$
- $x(-\infty) = +\infty$

The Archimedean Property

Teorema 4. (*sifat Archimedes*) Jika $x, y \in \mathbb{R}$ dan $x > 0$ maka terdapatlah suatu bilangan bulat positif $n \in \mathbb{N}$ sedemikian sehingga $nx > y$.

Bukti

Ditinjau himpunan

$$A = \{nx \mid n \in \mathbb{N} \text{ dan } x > 0\}$$

Anggap teorema di atas salah, maka untuk setiap $n \in \mathbb{N}$ berlaku $nx \leq y$. Dengan demikian himpunan A tidak kosong dan terbatas ke atas dengan suatu batas atas $y \in \mathbb{R}$. Karena $A \subset \mathbb{R}$ dan $\mathbb{R}$ mempunyai sifat batas atas terkecil, maka terdapatlah $a \in \mathbb{R}$ dan $a = \sup \mathrm{A}$. Karena $x > 0$ maka $a - x < a$ dan $a - x$ bukan batas atas dari A. Ini berarti terdapat $m \in \mathbb{N}$ sehingga $a - x < mx$, dimana $mx \in A$. Dari ketaksamaan $a - x < mx$ diperoleh $a < (m+1)x$. Karena $(m+1) \in \mathbb{N}$ maka $(m+1)x \in A$ dan berlaku $a < (m+1)x$. Hal ini kontradiksi dengan $a = \sup \mathrm{A}$. Jadi pernyataan pada teorema 2 benar.

Ruang Metrik

Definisi 15. Diberikan himpunan tidak kosong X. Fungsi $d: X\, x\, X \to \mathbb{R}^{+} \cup \{0\}$ disebut metrik pada X jika memenuhi aksioma-aksioma:

M1. $d(x, y) \geq 0$ untuk setiap $x, y \in X$

M2. $d(x, y) = 0$ jika dan hanya jika $x = y$

M3. $d(x, y) = d(y, x)$ untuk setiap $x, y \in X$

M4. $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$ untuk setiap x, y dan $z \in X$.

Himpunan X yang dilengkapi dengan fungsi jarak d, disebut ruang metrik dan dinyatakan dengan (X, d).

Contoh

1. Garis bilangan real $\mathbb{R}$ dengan fungsi jarak $d(x, y) = |x - y|$ untuk setiap $x, y \in \mathbb{R}$ merupakan metrik.

Bukti

M1. $d(x, y) = |x - y| \geq 0$ untuk setiap $x, y \in \mathbb{R}$.

M2. $(\Rightarrow)$ $d(x, y) = |x - y| = 0$, maka $x = y$.

$(\Leftarrow)$ Diberikan $x = y$, maka $d(x, y) = |x - y| = |y - y| = |0| = 0$.

M3. $d(x, y) = |x - y| = |y - x| = d(y, x)$ untuk setiap $x, y \in \mathbb{R}$.

M4. $d(x, y) = |x - y| = |x - z + z - y| \leq |x - z| + |z - y| = d(x, z) + d(z, y)$ untuk setiap x, y dan $z \in \mathbb{R}$.

Latihan Soal

1. Buktikan Fungsi

$$d(x, y) = \begin{cases} 1, \text{jika } x \neq y \\ 0, \text{jika } x = y \end{cases}$$

untuk setiap $x, y \in \mathbb{R}$ adalah metrik !

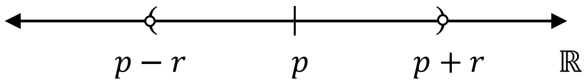
2. Diberikan $x = \mathbb{R}^2$. Didefinisikan fungsi $d: X\ x\ X \to \mathbb{R}$ dengan
$$d(\bar{x}, \bar{y}) = maks\{|x_1 - y_1|, |x_2 - y_2|\}$$
untuk setiap $\bar{x} = (x_1, x_2), \bar{y} = (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2$. Buktikan bahwa fungsi d adalah metrik !
3. Diberikan fungsi d yang didefinisikan oleh $d(p, q) = \sqrt{(a_1 - b_1)^2 + (a_2 - b_2)^2}$, dengan $p = (a_1, a_2)$ dan $q = (b_1, b_2)$ adalah titik dalam bidang $\mathbb{R}^2$. Buktikan bahwa d adalah metrik pada $\mathbb{R}^2$!

Persekitaran/*neighbourhood*

Definisi 16. Diberikan ruang metrik (X, d), titik $p \in X$ dan bilangan $r > 0$. Himpunan berbentuk $N_r(p) = \{x \in X | d(p, x) < r\}$ disebut persekitaran titik p dengan jari-jari $r > 0$. Titik p disebut pusat persekitaran $N_r(p)$.

Contoh

1. Jika $X = \mathbb{R}$ dan $d(x, y) = |x - y|$. Persekitaran titik $p \in \mathbb{R}$ adalah
$N_r(p) = \{x \in X | |p - x| < r\} = (p - r, p + r)$
merupakan interval terbuka.



Latihan Soal

1. Jika $X = \mathbb{R}^2$ dan $d(\bar{x}, \bar{y}) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2}$, untuk setiap $\bar{x} = (x_1, x_2), \bar{y} = (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2$. Tentukan persekitaran dari titik $\bar{p} = (p_1, p_2) \in \mathbb{R}^2$!
2. Jika $X = \mathbb{R}^3$ dengan metrik
$$d(\bar{x}, \bar{y}) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + (x_3 - y_3)^2},$$
untuk setiap $\bar{x} = (x_1, x_2, x_3), \bar{y} = (y_1, y_2, y_3) \in \mathbb{R}^3$. Tentukan persekitaran dari titik $\bar{p} = (p_1, p_2, p_3) \in \mathbb{R}^3$!

Titik Interior

Definisi 17. Diberikan ruang metrik (X, d) dan himpunan $H \subset X$. Titik $p \in H$ dikatakan titik interior dari H jika terdapat persekitaran titik p dengan radius $r > 0$ yaitu $N_r(p)$ sedemikian sehingga $N_r(p) \subset H$.

Contoh

1. Himpunan semua titik interior dari $A = [a, b)$ adalah $A^\circ = (a, b)$.
2. $B = (1,5)$
$B^\circ = (1,5)$
3. $H = [7,5]$
$H^\circ = (7,5)$

Latihan Soal

1. Tentukan titik interior dari:
   a. $A = [4,5)$
   b. $B = \{5\} \cup (11,14)$

Titik Eksterior

Definisi 18. Diberikan ruang metrik (X, d) dan himpunan $H \subset X$. Titik $p \in H^c$ dikatakan titik eksterior dari H jika terdapat persekitaran $N_r(p)$ sedemikian sehingga $N_r(p) \subset H^c$. $(eks(H) = H^e = Int(H^c))$

Contoh

1. Misalkan $H = (2,4)$, untuk $H^c = (-\infty, 2] \cup [4, +\infty)$ maka $H^e = (-\infty, 2) \cup (4, +\infty)$. Titik batas dari $H = (2,4)$ adalah $H_b = \{2,4\}$.

Latihan Soal

1. Tentukan titik eksterior dan titik batas dari:
   a. $N = (-\infty, 5)$
   b. $A = (1,2] \cup \{3\}$

Titik batas

Definisi 19. Diberikan ruang metrik (X, d) dan himpunan $H \subset X$. Titik $p \in X$ dikatakan titik batas himpunan H jika setiap persekitaran titik p dengan radius $r > 0$ yaitu $N_r(p)$ maka $N_r(p) \backslash H \neq \emptyset$ dan $N_r(p) \backslash H^c \neq \emptyset$.

Himpunan semua titik batas H ditulis H_b, dan titik batas himpunan H yang merupakan anggota H dinamakan titik fountier.

Contoh

1. Misalkan himpunan $H \subset \mathbb{R}$ dengan $H = [a, b)$. Tentukan titik batas himpunan H!
2. Tentukan titik batas dari $D = (4,9)$!

Jawab

1. $H_b = \{a, b\}$.
2. $D_b = \{4,9\}$

Latihan Soal

1. Tentukan titik batas dari:
   a. $E = [1,7)$
   b. $F = \{2\} \cup (4,7]$

Titik limit

Definisi 20. Diberikan ruang metrik (X, d) dan himpunan $H \subset X$. Titik $p \in X$ dikatakan titik limit himpunan H jika setiap persekitaran titik p dengan radius $r > 0$ yaitu $N_r(p)$ maka $\{N_r(p) \backslash \{p\}\} \cap H \neq \emptyset$.

Contoh

1. Misalkan himpunan $H \subset \mathbb{R}$ dengan $H = [a, b) \cup \{c\}$ dan $c > b$. Tentukan titik limitnya!
2. Tentukan titik limit dari $A = (1,2)$!

Jawab

1. $H' = [a, b]$
2. $A' = [1,2]$

Latihan Soal

1. Tentukan titik limit dari:
   a. $B = (2,5]$
   b. $C = \{1\} \cup [3,7]$

Teorema 5. Di dalam sebarang ruang metrik X, himpunan berhingga $H \subset X$ tidak mempunyai titik limit.

Penutup himpunan (closure)

Definisi 21. Diberikan ruang metrik X, $E \subset X$ dan E' himpunan semua titik limit himpunan E. Penutup himpunan (closure) E dinotasikan dengan $\bar{E}$ adalah himpunan $\bar{E} = E \cup E'$.

Contoh

1. Misalkan $E \subset \mathbb{R}$ dan $E = (a, b)$, tentukan closure E!

2. Tentukan closure dari $A = (1,2]$!

Jawab

1. $E = (a, b)$, $E' = [a, b]$

   $\bar{E} = E \cup E' = (a, b) \cup [a, b] = [a, b]$.
2. $\bar{A} = [1,2]$

Latihan Soal

1. Tentukan closure dari:
   a. $B = (3,4)$
   b. $C = [5,7]$
   c. $D = \{5\} \cup (7,9)$

Himpunan terbuka dan tertutup

Definisi 22. Diberikan ruang metrik X dan G adalah himpunan bagian tak kosong dari X. Himpunan G dikatakan terbuka jika setiap anggotanya merupakan titik interior himpunan G.

Definisi 23. Diberikan ruang metrik X dan F adalah himpunan bagian tak kosong dari X. Himpunan F dikatakan tertutup jika setiap titik limitnya termuat di dalam himpunan F.

Contoh

1. Tentukan apakah himpunan berikut himpunan terbuka, tertutup, atau bukan keduanya:
   a. $A = (1,5)$
   b. $B = [0,3]$
   c. $C = (-1,10]$