ANALISIS KOMPLEKS

Oleh:
Ahmad Khairul Umam, S.Si., M.Si.

DAFTAR ISI

BAB I
ALJABAR DAN GEOMETRI BILANGAN KOMPLEKS

1.1 Aljabar Bilangan Kompleks

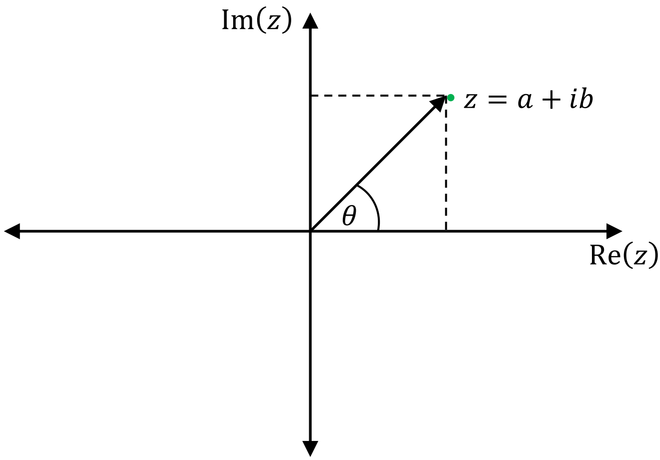
$\mathbb{C}$ = Himpunan Bilangan Kompleks

= $\{z = a + ib \mid a, b \in \mathbb{R} \text{ dan } i = \sqrt{-1}\}$

Bilangan Kompleks = $z = a + ib$, konjugatnya adalah $\bar{z} = a - ib$.

Contoh 1. Bilangan Kompleks $z = -2 + 3i$, konjugatnya adalah $\bar{z} = -2 - 3i$.

Bidang Argan $\mathbb{C}$



Gambar 1.1.1. Koordinat Bilangan Kompleks pada Bidang Argan

Contoh 2. Tulislah bilangan kompleks berikut pada bidang Argan:

a. $z = 2 + 3i$

b. $z = 3 - 4i$

Bilangan Kompleks $z = a + ib$. Modulus bilangan kompleks $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$. Argumen adalah sudut pada bilangan kompleks disingkat $arg(z)$ dimana:

$$\cos\theta = \frac{a}{|z|} \text{ dan } \sin\theta = \frac{b}{|z|}$$

dan $-\pi < \theta \leq \pi$.

Contoh 3. Berapakah modulus dari bilangan-bilangan kompleks:

a. $z = 5 - 2i$

b. $z = 10$

Contoh 4. Carilah $arg(z)$ dari bilangan kompleks berikut

a. $z = 3i$

b. $z = 2 + 3i$

Contoh 5. Buktikan bahwa $e^{i\theta} = \text{cis}\theta$!

Jawab

Dari deret Taylor dan Mac Laurin didapatkan:

- $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \cdots$
- $\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots + \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \cdots$
- $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots + \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!} + \cdots$

$$\begin{aligned}
\therefore \quad e^{i\theta} &= 1 + i\theta + \frac{(i\theta)^2}{2!} + \frac{(i\theta)^3}{3!} + \frac{(i\theta)^4}{4!} + \frac{(i\theta)^5}{5!} + \cdots \\
&= 1 + i\theta - \frac{\theta^2}{2!} - i\frac{\theta^3}{3!} + \frac{\theta^4}{4!} + i\frac{\theta^5}{5!} - \cdots \\
&= 1 - \frac{\theta^2}{2!} + \frac{\theta^4}{4!} - \cdots + i\theta - i\frac{\theta^3}{3!} + i\frac{\theta^5}{5!} - \cdots \\
&= 1 - \frac{\theta^2}{2!} + \frac{\theta^4}{4!} - \cdots + i\left(\theta - \frac{\theta^3}{3!} + \frac{\theta^5}{5!} - \cdots\right) \\
&= \cos\theta + i\sin\theta \\
&= \text{cis}\,\theta.
\end{aligned}$$

Misalkan modulus $|z|$ ditulis r, maka:

$a = r\cos\theta$

$b = r\sin\theta$

Untuk bilangan kompleks z menjadi:

$z = a + ib = r\cos\theta + ir\sin\theta = r(\cos\theta + i\sin\theta) = r\text{cis}\theta$

$= re^{i\theta}$ dimana $-\pi < \theta \leq \pi$.

Contoh 6. Buktikan bahwa $e^{i\pi} + 1 = 0$!

Misalkan $z = a + ib$ dan $w = c + id$. Operasi pada dua bilangan kompleks z dan w yaitu:

1. $z + w = a + ib + c + id = (a + c) + i(b + d)$
2. $z - w = a + ib - (c + id) = a + ib - c - id$

   $= (a - c) + i(b - d)$
3. $zw = (a + ib)(c + id) = ac + iad + ibc - bd$

   $= (ac - bd) + i(ad + bc)$
4. $\frac{z}{w} = \frac{a+ib}{c+id} = \frac{a+ib}{c+id} \times \frac{c-id}{c-id} = \frac{ac-iad+ibc+bd}{c^2+d^2} = \frac{ac+bd+i(bc-ad)}{c^2+d^2}$

   $= \frac{ac+bd}{c^2+d^2} + i\,\frac{bc-ad}{c^2+d^2}$

Contoh 7. Nyatakan bilangan kompleks berikut dalam bentuk $a + ib$:

a. $(5 - 2i) + (2 + 3i)$

b. $(2 + 3i)(4 - i)$

Untuk setiap bilangan kompleks z dan w, berlaku:

1. $\overline{z + w} = \bar{z} + \bar{w}$
2. $\overline{z.w} = \bar{z}.\bar{w}$
3. $\overline{z - w} = \bar{z} - \bar{w}$
4. $\overline{\left(\frac{z}{w}\right)} = \frac{\bar{z}}{\bar{w}}$
5. $\bar{\bar{z}} = z$
6. $z.\bar{z} = a^2 + b^2$
7. $z + \bar{z} = 2\mathrm{Re(z)}$
8. $z - \bar{z} = 2\mathrm{Im(z)}$

Contoh 8. Nyatakan bilangan kompleks berikut dalam bentuk $a + ib$:

a. $i.\bar{\imath}$

b. $\overline{\overline{(1 - \imath)}}$

c. $\frac{1}{3-2i}$

d. $\overline{\left(\frac{3+2\imath}{3-2\imath}\right)}$

Teorema 1.1.1. Untuk setiap bilangan kompleks z dan w, berlaku:

1. $|z| = |-z| = |iz| = |\bar{z}| = |i\bar{z}|$
2. $|z - w| = |w - z|$
3. $|z|^2 = |z^2| = z.\bar{z}$

   Akibatnya, jika $z \neq 0$ maka

   $$\frac{1}{z} = \frac{\bar{z}}{|z|^2}$$
4. $|zw| = |z||w|$
5. $\left|\frac{z}{w}\right| = \frac{|z|}{|w|}$, asalkan $w \neq 0$
6. $|z + w| \leq |z| + |w|$
7. $\big||z| - |w|\big| \leq |z| - |w|$
8. $|z| - |w| \leq |z + w|$

Contoh 9. Jika $z = 1 + i$ dan $w = 2 - 3i$, tentukanlah $|z + \bar{w}|$!

Contoh 10. Selesaikanlah:

a. $|(2 + i)(2 - i)|$

b. $\left|\frac{3-i}{3+i}\right|$

c. $|8 + i6|^2$

Contoh 11. Nyatakan bilangan kompleks $z = 1 - i$ dalam bentuk polarnya!

Jawab

$r = |z| = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{1^2 + (-1)^2} = \sqrt{1 + 1} = \sqrt{2}$

$\cos\theta = \frac{a}{|z|} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \times \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$

$\theta = \cos^{-1}\frac{\sqrt{2}}{2} = -45° = -\frac{\pi}{4}$

∴ Jadi bentuk polarnya adalah $z = re^{i\theta} = \sqrt{2}e^{-\frac{\pi}{4}i}$

Teorema 1.1.2. Jika $z = r\text{cis}t$ dan $w = \rho\text{cis}\theta$ maka

$$zw = r\rho\text{cis}(t + \theta)$$

dan

$$\frac{z}{w} = \frac{r}{\rho}\text{cis}(t - \theta).$$

Teorema 1.1.3. (de Moivre). Jika $z = r\text{cis}t$ maka $z^n = r^n\text{cis}nt$, untuk setiap n bilangan bulat tak negatif.

Dalam bentuk eksponensial, berlaku sifat-sifat sebagai berikut:

1. $zw = re^{it}.\rho e^{i\theta} = r\rho e^{i(t+\theta)}$
2. $\frac{z}{w} = \frac{re^{it}}{\rho e^{i\theta}} = \frac{r}{\rho}e^{i(t-\theta)}$
3. $z^n = r^n e^{int}$, $\forall n$ bilangan bulat tak negatif.

Definisi 1.1.1. $r\text{cis}t = \rho\text{cis}\theta$ jika dan hanya jika $r = \rho$ dan $t = \theta + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

Contoh 12. Tentukan nilai dari $z = \sqrt[3]{i}$!

Jawab

$z = \sqrt[3]{i}$

$z^3 = i = \rho\text{cis}\theta$

$\rho = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{0^2 + 1^2} = \sqrt{0 + 1} = \sqrt{1} = 1$

$\cos\theta = \frac{a}{\rho} = \frac{0}{1} = 0$

$\theta = \cos^{-1} 0 = \dfrac{\pi}{2}$

Jadi

$z^3 = i = \rho \text{cis}\theta = 1\text{cis}\frac{\pi}{2}$.

Misalkan $z = r\text{cis}t$ maka $z^3 = (r\text{cis}t) = r^3\text{cis}3t$. Kita ketahui bahwa

$z^3 = z^3$

$r^3\text{cis}3t = 1\text{cis}\dfrac{\pi}{2}$

Dari persamaan tersebut dapat disimpulkan bahwa

$r^3 = 1$ maka $r = 1$.

Begitu juga

$3t = \dfrac{\pi}{2} + 2k\pi, \qquad k = 0, 1, 2$

$t_k = \dfrac{\pi}{6} + \dfrac{2}{3}k\pi, \qquad k = 0, 1, 2$

- $k = 0$, maka

  $z_0 = r\text{cis}t_0 = 1\text{cis}\dfrac{\pi}{6} = \cos\dfrac{\pi}{6} + i\sin\dfrac{\pi}{6}$

  $= \cos 30° + i\sin 30° = \dfrac{\sqrt{3}}{2} + i\dfrac{1}{2}$

- $k = 1$, maka

  $z_1 = r\text{cis}t_1 = 1\text{cis}\left(\dfrac{\pi}{6} + \dfrac{2\pi}{3}\right) = \text{cis}\left(\dfrac{\pi}{6} + \dfrac{4\pi}{6}\right) = \text{cis}\dfrac{5\pi}{6}$

  $= \cos\frac{5\pi}{6} + i\sin\frac{5\pi}{6} = \cos 150° + i\sin 150° = -\frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2}$

- $k = 2$, maka

  $z_2 = r\text{cis}t_2 = 1\text{cis}\left(\dfrac{\pi}{6} + \dfrac{4\pi}{3}\right) = \text{cis}\left(\dfrac{\pi}{6} + \dfrac{8\pi}{6}\right) = \text{cis}\dfrac{9\pi}{6}$

  $= \text{cis}\dfrac{3\pi}{2} = \cos\dfrac{3\pi}{2} + i\sin\dfrac{3\pi}{2} = \cos 270° + i\sin 270°$

  $= 0 + i(-1) = -i$

∴ Jadi nilai dari $z = \sqrt[3]{i}$ adalah $z_0 = \frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2}$, $z_1 = -\frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2}$ dan $z_2 = -i$.

Latihan Soal

1. Tulislah bilangan kompleks dan konjugatnya pada bidang Argan:
   c. $z = -2 - 3i$
   d. $z = 5i$
2. Berapakah modulus dari bilangan-bilangan kompleks:
   a. $z = -2 + 2i$
   b. $z = \sqrt{3}$
3. Carilah $arg(z)$ dari bilangan kompleks berikut
   c. $z = 1 + i$
   d. $z = 2 + 3i$
4. Nyatakan bilangan kompleks berikut dalam bentuk $a + bi$:
   a. $\frac{3+2i}{3-2i}$
   b. $\frac{i}{1-i} + \overline{\left(\frac{1-\imath}{\imath}\right)}$
   c. $z = \frac{1}{i} - \frac{3i}{1-2i}$
   d. $\frac{\sqrt{3}+i}{\sqrt{3}-i}$
   e. $(1 + 2i)\overline{(2 + 3\imath)}$
5. Jika $z = 1 + i$ dan $w = 2 - 3i$, tentukanlah $\bar{z}.w$ dan $\frac{z\bar{w}}{z-w}$!
6. Jika $z = 1 + 2i$ dan $w = -3 - 4i$, tentukanlah $|\bar{z} - \bar{w}|$!
7. Selesaikanlah:
   a. $|3 + 4i|^2$
   b. $i|1 - i|$
8. Nyatakan bilangan kompleks berikut dalam bentuk polarnya:
   a. $z = -1$

b. $z = -2 + 2i$
c. $z = 3$
d. $z = -4i$
e. $z = 2 - 3i$
f. $z = 3 + 3i$
g. $z = -2 - 2i$
h. $z = -i\sqrt{2}$
i. $z = i\sqrt{3}$
j. $z = \sqrt{3} + 3i$

9. Tentukan nilai dari $z = \sqrt{i}$!
10. Tentukan nilai dari $z = \sqrt{2i}$!
11. Tentukan nilai dari $= \sqrt{-i}$!
12. Tentukan semua z yang memenuhi persamaan $z^3 + 8 = 0$!

1.2 Geometri Bilangan Kompleks

1.2.1 Tempat Kedudukan Himpunan Titik di Bidang Kompleks

Tempat Kedudukan Himpunan Titik di Bidang Kompleks

Contoh 1. Tentukan tempat kedudukan titik-titik di bidang kompleks berikut:

a. $|z + i| = 2$
b. $|z - 2i| = |z + 2|$
c. $|z + 3| - |z + 1| = 1$

Jawab

a. $|z + i| = 2$

$|x + iy + i| = 2$

$|x + i(y + 1)| = 2$

$\sqrt{x^2 + (y + 1)^2} = 2$

$x^2 + (y + 1)^2 = 4$

$\therefore$ Jadi titik berada pada lingkaran yang berpusat di $(0,-1) = 0 - i = -i$ dan berjari-jari 2.

b. $|z - 2i| = |z + 2|$

$|x + iy - 2i| = |x + iy + 2|$

$|x + i(y - 2)| = |(x + 2) + iy|$

$\sqrt{x^2 + (y - 2)^2} = \sqrt{(x + 2)^2 + y^2}$

$\sqrt{x^2 + y^2 - 4y + 4} = \sqrt{x^2 + 4x + 4 + y^2}$

$x^2 + y^2 - 4y + 4 = x^2 + 4x + 4 + y^2$

$-4y = 4x$

$y = -x$

$\therefore$ Jadi titik berada pada garis $y = -x$.

c. $|z + 3| - |z + 1| = 1$

$|(z + 3) + (z + 1)| \geq |z + 3| - |z + 1| = 1$

Jadi

$|(z + 3) + (z + 1)| \geq 1$

$|2z + 4| \geq 1$

$|2(x + iy) + 4| \geq 1$

$|2x + 2yi + 4| \geq 1$

$|(2x + 4) + 2yi| \geq 1$

$\sqrt{(2x + 4)^2 + (2y)^2} \geq 1$

$\sqrt{4x^2 + 4y^2 + 16x + 16} \geq 1$

$\left(\sqrt{4x^2 + 4y^2 + 16x + 16}\right)^2 \geq 1^2$

$4x^2 + 4y^2 + 16x + 16 \geq 1$

$4x^2 + 4y^2 + 16x + 15 \geq 0$

$$x^2 + y^2 + 4x + \frac{15}{4} \geq 0$$

$x^2 + y^2 + Ax + By + C \geq 0$

Pusat Lingkaran = $\left(-\frac{A}{2}, -\frac{B}{2}\right) = \left(-\frac{4}{2}, \frac{0}{2}\right) = (-2{,}0)$

Jari-jari Lingkaran = $\sqrt{\frac{1}{4}A^2 + \frac{1}{4}B^2 - C}$

$$= \sqrt{\frac{1}{4}(4)^2 + \frac{1}{4}(0) - \frac{15}{4}}$$

$$= \sqrt{\frac{16}{4} - \frac{15}{4}} = \sqrt{\frac{1}{4}} = \frac{1}{2}$$

∴ Jadi titik berada tepat dan diluar lingkaran $x^2 + y^2 + 4x + \frac{15}{4} = 0$ dengan pusat $(-2,0)$ dan jari-jari $\frac{1}{2}$.

Latihan Soal

1. Tentukan tempat kedudukan titik-titik di bidang kompleks berikut:
   a. $|z-5| \leq 6$
   b. $|z-2| \leq |z|$
   c. $|z| \leq |z-2+3i|$
   d. $\mathrm{Re}(z+2) > -1$
   e. $|z+i| < |z-i|$
   f. $\mathrm{Im}(i\bar{z}) \geq 4$
   g. $-2 \leq \mathrm{Re}(\overline{iz}) < 1$
2. Tentukan jarak dari titik-titik di bidang kompleks berikut:
   a. $z = 2+i$ dan $w = 3-i$
   b. $z = 2i$ dan $w = 6$
   c. $z = -2-8i$ dan $w = -i$

1.2.2 Modulus (Nilai Mutlak) dari Bilangan Kompleks

Definisi 1.2.2.1. Jika $z = x + iy$ adalah bilangan kompleks maka modulus dari z ditulis $|z|$ dan didefinisikan sebagai $|z| = x + iy = \sqrt{x^2 + y^2}$.

- Misal diberikan $|z - z_1| = r$ dimana $z_1 = x_1 + iy_1$ dan $r > 0$, maka hal itu menyatakan suatu lingkaran yang berpusat di $z_1 = (x_1, y_1)$ dengan jari-jari r.
- Misal diberikan $|z - z_1| < r$ dimana $z_1 = x_1 + iy_1$ dan $r > 0$, maka hal itu menyatakan daerah di dalam

lingkaran yang berpusat di $z_1 = (x_1, y_1)$ dengan jari-jari r.

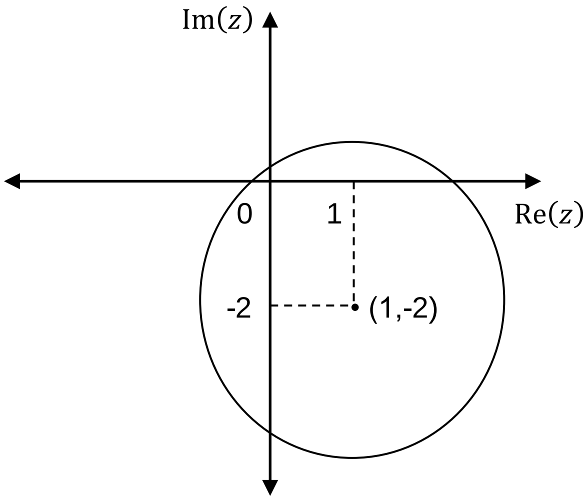
Contoh 1. Gambarkan $|z - 1 + 2i| = 3$ pada bidang z!

Jawab

$|z - 1 + 2i| = 3$

$|z - (1 - 2i)| = 3$

Persamaan di atas menyatakan suatu lingkaran yang berpusat di $(1, -2)$ dengan jari-jari 3.



Gambar 1.2.2.1.

Latihan Soal

1. Gambarkan:
   a. $|z + i| < 3$
   b. $|z + 2 - 3i| \leq 1$
   c. $|z - 3 - 3i| = 3$

   pada bidang z!

BAB II
FUNGSI KOMPLEKS

2.1 Fungsi Kompleks Secara Umum

Definisi 2.1.1. Fungsi kompleks adalah suatu aturan yang memetakan atau mentransformasikan suatu bilangan kompleks $z = x + iy \in \mathbb{C}$ menjadi suatu bilangan kompleks $w = u + iv \in \mathbb{C}$. Fungsi kompleks biasa dinotasikan sebagai $f(z) = w = u(x, y) + iv(x, y) = f(x, y)$.

Fungsi kompleks bisa juga disebut transformasi. Beberapa fungsi kompleks yaitu fungsi linear, fungsi pangkat, fungsi resiprokal, fungsi bilinear, fungsi eksponen, fungsi logaritma, fungsi trigonometri, fungsi hiperbolik, dan lain-lain.

2.2 Fungsi Linear

Definisi 2.2.1. Fungsi linear memiliki bentuk umum

$$f(z) = w = az + b$$

dengan $a, b \in \mathbb{C}$. Jika $a = 0$ maka fungsi linear berubah menjadi fungsi konstan. Jika $a = 1$ dan $b = 0$ maka fungsi linear merupakan fungsi identitas.

Contoh 1. Tentukan transformasi fungsi $w = f(z) = 3z + 2$ dimana $z = 2 + 3i$!

Jawab

$w = f(z) = f(2 + 3i\ ) = 3(2 + 3i\ ) + 2 = 6 + 9i + 2 = 8 + 9i$

Jadi $u = 8$ dan $v = 9$.

Latihan Soal

1. Tentukan transformasi fungsi kompleks:
   a. $f(z) = z - 2$ dimana $z = -2i$
   b. $w = f(z) = 5 - 4z$ dimana $z = 4 - 2i$
2. Carilah transformasi fungsi $w = f(z) = 1 + 2z$ untuk $z = x + iy$!

3. Carilah transformasi fungsi $w = f(z) = i - 2\bar{z}$ untuk $z = 2x - iy$!

2.3 Fungsi Pangkat

Definisi 2.3.1. Fungsi pangkat yang didefinisikan untuk setiap bilangan kompleks z adalah fungsi berbentuk

$$f(z) = w = z^n$$

dengan $n \in \mathbb{N}$.

Contoh 1. Carilah transformasi fungsi kompleks $w = f(z) = z^2$ dari $z = 1 + 2i$!

Jawab

$$\begin{aligned} w = f(z) = f(1 + 2i\,) &= (1 + 2i)^2 = 1^2 + 2(1)(2i) + (2i)^2 \\ &= 1 + 4i - 4 = -3 + 4i \end{aligned}$$

Jadi $u = -3$ dan $v = 4$.

Latihan Soal

1. Carilah transformasi titik $z = 3 - i$ pada fungsi-fungsi kompleks:
   a. $w = f(z) = z^3$
   b. $w = f(z) = -2z^2$

2.4 Fungsi Resiprokal

Definisi 1.4.1. Fungsi resiprokal adalah fungsi berbentuk

$$f(z) = w = \frac{1}{z}$$

dengan $z \neq 0$.

Misalkan $z = r\text{cis}t$ dimana $r \neq 0$, maka

$$w = f(z) = \frac{1}{z} = \frac{1}{r\text{cis}t} = \frac{1}{r}\text{cis}(-t).$$

Secara geometris dapat diartikan bahwa transformasi resiprokal terhadap z menghasilkan bilangan kompleks yang panjangnya $|z|^{-1}$ dan sudutnya $-\arg z$. Jika $|z| < 1$ maka $|w| > 1$, begitu juga sebaliknya. Jika titik-titik berada di dalam lingkaran dengan $|z| = 1$ maka akan ditransformasikan menjadi titik-titik di luar lingkaran, dan juga sebaliknya. Sedangkan titik-titik pada lingkaran akan tetap berada pada lingkaran, namun posisinya dicerminkan terhadap sumbu-x karena sudutnya adalah $-t$.

Contoh 1. Tentukan transformasi fungsi-fungsi kompleks:

a. $w = f(z) = \frac{1}{z}$ dimana $z = 3i$

b. $w = f(z) = \frac{1}{z}$ dimana $z = 2 - 2i$

Tentukan juga modulus dan argumen dari z dan w!

Contoh 2. Tentukan transformasi fungsi kompleks:

$$w = f(z) = \frac{4}{z} \text{ dimana } z = 1 - i!$$

2.5 Fungsi Eksponensial

Definisi 2.5.1. Fungsi eksponensial pada bilangan kompleks $z = x + iy$ didefinisikan sebagai

$$f(z) = e^z = e^{x+iy} = e^x e^{iy} = e^x(\cos y + i \sin y).$$

Fungsi eksponensial pada bilangan kompleks e^z memiliki sifat-sifat yang sama dengan sifat-sifat fungsi eksponensial pada bilangan real. Berikut sifat-sifat fungsi eksponensial pada bilangan kompleks e^z:

1. $e^z \neq 0$
2. $e^0 = 1$
3. $e^z e^w = e^{z+w}$
4. $\frac{e^z}{e^w} = e^{z-w}$
5. $e^{\bar{z}} = \overline{e^z}$
6. $e^z = e^{z+2\pi i}$
7. $|e^z| = e^x$
8. $\arg(e^z) = y$

Contoh 1. Hitunglah:

a. $w = f(z) = e^z$ dimana $z = -3 + \pi i$

b. $w = f(z) = |e^z|$ dimana $z = -5i$

BAB III
LIMIT FUNGSI KOMPLEKS DAN FUNGSI KOMPLEKS KONTINU

3.1 Limit Fungsi Kompleks

Definisi 3.1.1.

$$\lim_{z \to z_0} f(z) = L$$

jika

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 \ni 0 < |z - z_0| < \delta \Rightarrow |f(z) - L| < \varepsilon.$$

Sifat-sifat:

1. Jika $\lim_{z \to z_0} f(z)$ ada maka nilainya tunggal.
2. Jika $\lim_{z \to z_0} |f(z)| = 0$ maka $\lim_{z \to z_0} f(z) = 0$.

Contoh 1. Tentukan $\lim_{z \to 3-4i} \frac{i\mathrm{Re}(z)}{|z|}$!

Jawab

$$\lim_{z \to 3-4i} \frac{i\mathrm{Re}(z)}{|z|} = \lim_{(x,y) \to (3,-4)} \frac{i\mathrm{Re}(x+iy)}{|x+iy|} = \lim_{(x,y) \to (3,-4)} \frac{i\mathrm{x}}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

$$= \frac{3i}{\sqrt{3^2+(-4)^2}} = \frac{3i}{\sqrt{9+16}} = \frac{3i}{\sqrt{25}} = \frac{3}{5}i.$$

Contoh 2. Carilah $\lim_{z \to 2i} \frac{z^2+4}{z-2i}$!

Jawab

$$\lim_{z \to 2i} \frac{z^2+4}{z-2i} = \lim_{z \to 2i} \frac{(z-2i)(z+2i)}{z-2i} = \lim_{z \to 2i} (z+2i) = 2i+2i$$

$$= 4i.$$

Latihan soal

1. Carilah $\lim_{z \to 3-4i} \frac{i\mathrm{Re}(z^2)}{|z|}$!
2. Tentukan (bila ada) $\lim_{z \to 0} \frac{2xy}{x^2+y^2}$!
3. Carilah nilai $\lim_{z \to i} \frac{z^2+1}{z-i}$!

4. Selidikilah apakah $\lim\limits_{z \to i} \frac{x+y-1}{z-i}$ ada!
5. Buktikan bahwa $\lim\limits_{z \to 0} \frac{z}{\bar{z}}$ tidak ada!
6. Carilah limit dari:
   a. $\lim\limits_{z \to 1} \frac{i + \mathrm{Re}(z)}{|z|}$
   b. $\lim\limits_{z \to i} \frac{\mathrm{Im}(z) - 1}{iy - i}$
7. Tentukan limit dari

$$\lim_{z \to 1} \frac{1 - \mathrm{Re}(z)}{i - ix}!$$

3.2 Fungsi Kompleks Kontinu

Fungsi $f(z)$ kontinu di z_0 jika memenuhi syarat-syarat berikut:

1. Nilai $f(z_0)$ ada
2. Nilai $\lim\limits_{z \to z_0} f(z)$ ada
3. $\lim\limits_{z \to z_0} f(z) = f(z_0)$

Contoh 1. Diberikan fungsi kompleks

$$f(z) = \begin{cases} \dfrac{z^2 + 9}{z - 3i}, \text{jika } z \neq 3i \\ 2i, \text{jika } z = 3i \end{cases}$$

Tentukan apakah $f(z)$ kontinu di $z = 3i$!

Jawab

- $f(3i) = 2i$
- $\lim\limits_{z \to 3i} f(z) = \lim\limits_{z \to 3i} \frac{z^2+9}{z-3i} = \lim\limits_{z \to 3i} \frac{(z-3i)(z+3i)}{z-3i}$
  $= \lim\limits_{z \to 3i} (z + 3i) = 3i + 3i = 6i$

$\therefore$ Karena $\lim\limits_{z \to 3i} f(z) = 6i \neq 2i = f(3i)$ maka $f(z)$ tidak kontinu di $z = 3i$.

Latihan Soal

1. Diberikan fungsi kompleks

$$f(z) = \begin{cases} \dfrac{z^2 + 16}{z - 4i}, \text{jika } z \neq 4i \\ 8i, \text{jika } z = 4i \end{cases}$$

Tentukan apakah $f(z)$ kontinu di $z = 4i$!

2. Diberikan fungsi kompleks

$$f(z) = \begin{cases} \dfrac{z + i}{z^2 + 1}, \text{jika } z \neq -i \\ a, \text{jika } z = -i \end{cases}$$

Tentukan nilai a agar $f(z)$ kontinu di $z = -i$!

3. Diberikan fungsi kompleks

$$f(z) = \begin{cases} \dfrac{z^2 + 9}{z - 3i}, \text{jika } z \neq 3i \\ 6i, \text{jika } z = 3i \end{cases}$$

Tentukan apakah $f(z)$ kontinu di $z = 3i$!

4. Diberikan fungsi kompleks

$$f(z) = \begin{cases} \dfrac{z^2 + 4}{z - 2i}, \text{jika } z \neq 2i \\ 3 + 4z, \text{jika } z = 2i \end{cases}$$

Tentukan apakah $f(z)$ kontinu di $z = 2i$!

5. Diberikan fungsi kompleks

$$f(z) = \begin{cases} \dfrac{z^2 + 25}{z - 5i}, \text{jika } z \neq 5i \\ a, \text{jika } z = 5i \end{cases}$$

Tentukan nilai a agar $f(z)$ kontinu di $z = 5i$!

BAB IV
TURUNAN FUNGSI KOMPLEKS, FUNGSI ANALITIK, DAN INTEGRAL FUNGSI KOMPLEKS

4.1 Turunan Fungsi Kompleks

Definisi 4.1.1.

$$f'(z) = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{f(z+\Delta z) - f(z)}{\Delta z}$$

atau

$$f'(z_0) = \lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}.$$

Contoh 1. Tentukan turunan dari fungsi kompleks $f(z) = z^2 + 3z$ menggunakan definisi!

Jawab

$$\begin{aligned} f'(z) &= \lim_{\Delta z \to 0} \frac{f(z+\Delta z) - f(z)}{\Delta z} \\ &= \lim_{\Delta z \to 0} \frac{(z+\Delta z)^2 + 3(z+\Delta z) - (z^2 + 3z)}{\Delta z} \\ &= \lim_{\Delta z \to 0} \frac{z^2 + 2z\Delta z + (\Delta z)^2 + 3z + 3\Delta z - z^2 - 3z}{\Delta z} \\ &= \lim_{\Delta z \to 0} \frac{2z\Delta z + (\Delta z)^2 + 3\Delta z}{\Delta z} \\ &= \lim_{\Delta z \to 0} 2z + 3 + \Delta z = 2z + 3 + 0 = 2z + 3. \end{aligned}$$

Berikut teknik-teknik turunan:

1. $\frac{d}{dz}(c) = 0$, dimana c adalah konstanta
2. $\frac{d}{dz}(z) = 1$
3. $\frac{d}{dz}[cf(z)] = cf'(z)$
4. $\frac{d}{dz}(z^n) = nz^{n-1}, n \in \mathbb{Z}$

   Bukti

   $f'(z_0)$

$$= \lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$$
$$= \lim_{z \to z_0} \frac{z^n - (z_0)^n}{z - z_0}$$
$$= \lim_{z \to z_0} \frac{(z - z_0)(z^{n-1} + z^{n-2}z_0 + \cdots + zz_0{}^{n-2} + z_0{}^{n-1})}{z - z_0}$$
$$= \lim_{z \to z_0} (z^{n-1} + z^{n-2}z_0 + \cdots + zz_0{}^{n-2} + z_0{}^{n-1})$$
$$= (z_0)^{n-1} + (z_0)^{n-2}z_0 + \cdots + (z_0)z_0{}^{n-2} + z_0{}^{n-1}$$
$$= \underbrace{z_0{}^{n-1} + z_0{}^{n-1} + \cdots + z_0{}^{n-1} + z_0{}^{n-1}}_{n}$$
$$= nz_0{}^{n-1}, n \in \mathbb{Z}$$

Kalau misal z_0 diganti dengan z, maka menjadi $f'(z) = nz^{n-1}, n \in \mathbb{Z}$.

5. $\frac{d}{dz}[f(z)g(z)] = f'(z)g(z) + f(x)g'(z)$
6. $\frac{d}{dz}\left[\frac{f(z)}{g(z)}\right] = \frac{f'(z)g(z) - f(z)g'(z)}{[g(z)]^2}$
7. Misal $F(z) = g(f(z))$, maka $F'(z) = g'[f(z)].f'(z)$. (aturan rantai)

Contoh 2. Tentukan turunan dari $f(z) = (z^2 + 1)^3$ menggunakan aturan rantai!

Jawab

$f'^{(z)} = 3(z^2 + 1)^{3-1}.(2z) = 6z(z^2 + 1)^2$.

Teorema 4.1.1. (Cauchy-Riemann 1) Diberikan fungsi kompleks $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$. Jika:

1. Fungsi bagian $u(x, y), v(x, y), u_x, u_y, v_x$, dan v_y kontinu di semua titik pada persekitaran $N_\varepsilon(z_0)$ dari suatu titik z_0.
2. Pada titik z_0 berlaku $u_x = v_y$ dan $v_x = -u_y$.

Maka $f'(z_0)$ ada, dan

$$f'(z_0) = u_x(z_0) + iv_x(z_0) = v_y(z_0) - iu_y(z_0).$$

Teorema 4.1.2. (Cauchy-Riemann 2) Jika fungsi kompleks $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ memiliki turunan di z_0 maka turunan parsial dari $u(x, y)$ dan $v(x, y)$ ada, dan pada z_0 berlaku

$$u_x = v_y \text{ dan } v_x = -u_y.$$

Contoh 3. Buktikan turunan dari $f(z) = z^2$ ada untuk semua z dan $f'(z) = 2z$ menggunakan teorema Cauchy-Riemann 1!

Jawab

$f(z) = z^2 = (x + iy)^2 = x^2 - y^2 + i2xy$

- $u(x, y) = x^2 - y^2$
- $v(x, y) = 2xy$
- $u_x = 2x$
- $u_y = -2y$
- $v_x = 2y$
- $v_y = 2x$

Dari 6 fungsi bagian tersebut terlihat bahwa fungsi tersebut kontinu pada setiap titik $z = (x, y)$. Kemudian

$u_x = 2x = v_y$ dan $v_x = 2y = -(-2y) = -u_y$.

Jadi $f'(z)$ ada, dan

$f'(z) = u_x + iv_x = 2x + i2y = 2(x + iy) = 2z$

atau

$$\begin{aligned} f'(z) &= v_y - iu_y = 2x - i(-2y) = 2x + i2y = 2(x + iy) \\ &= 2z. \end{aligned}$$

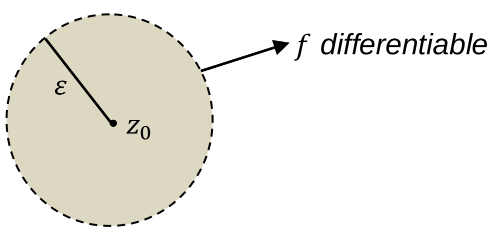
Latihan Soal

1. Carilah turunan dari fungsi-fungsi kompleks berikut menggunakan definisi:
   a. $f(z) = 5z$
   b. $f(z) = z^3$
   c. $f(z) = 2z^3$
   d. $f(z) = z^4 + 5$
   e. $f(z) = (2z + 3)^2$
   f. $f(z) = (z + 1)^2$

2. Dengan menggunakan teknik turunan, tentukan turunan dari:
   a. $f(z) = \frac{z+2}{2z-3}$
   b. $f(z) = (z-3)^2(4z-6)$
   c. $f(z) = (5z^3 + 6z^2 + 7z)^4$
   d. $f(z) = (2z^2 + i)^5$
   e. $f(z) = (2z+8)(1-2z+z^2)$
   f. $f(z) = \frac{z^2-2}{5z+3}$
   g. $f(z) = (z-3)(2z^2+z-4)$
   h. $f(z) = \frac{(2z+1)^2}{z^2+5}$
3. Tentukan turunan dari fungsi $f(z) = 3z$ menggunakan teorema Cauchy-Riemann!
4. Tentukan turunan dari fungsi $f(z) = 3z^2$ menggunakan teorema Cauchy-Riemann!
5. Tentukan turunan dari fungsi $f(z) = e^z$ menggunakan teorema Cauchy-Riemann!

4.2 Fungsi Analitik

Definisi 4.2.1. Diberikan fungsi kompleks $f(z)$ dengan daerah definisi $D_f \in \mathbb{C}$ dan $z \in \mathrm{Int}(D_f)$. Fungsi f dikatakan analitik di z_0 jika $f'(z)$ ada untuk semua z yang terletak pada suatu persekitaran $N_\varepsilon(z_0)$ dari z_0.



Gambar 4.2.1. Fungsi f analitik di z_0.

Persamaan Cauchy-Riemann: Diberikan fungsi kompleks $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$. Persamaan Cauchy-Riemann dari fungsi tersebut adalah

$$u_x = v_y \text{ dan } v_x = -u_y.$$

Suatu fungsi kompleks $f(z)$ dikatakan **fungsi analitik** jika memenuhi persamaan Cauchy-Riemann.

Contoh 1. Apakah fungsi kompleks $f(z) = z^2$ adalah fungsi analitik? Buktikan!

Jawab

Fungsi kompleks $f(z) = z^2$ adalah fungsi analitik.

$f(z) = z^2 = (x + iy)^2 = x^2 - y^2 + 2xyi$

- $u(x,y) = x^2 - y^2$
- $v(x,y) = 2xy$
- $u_x = 2x$
- $u_y = -2y$
- $v_x = 2y$
- $v_y = 2x$

Karena turunan parsial dari fungsi kompleks $f(z) = z^2$ memenuhi persamaan Cauchy-Riemann yaitu

$$u_x = 2x = v_y \text{ dan } v_x = 2y = -(-2y) = -u_y$$

maka fungsi $f(z) = z^2$ adalah fungsi analitik.

Latihan Soal

1. Apakah fungsi kompleks $f(z) = z^3$ adalah fungsi analitik? Buktikan!
2. Apakah fungsi kompleks $f(z) = x^2 - iy^2$ adalah fungsi analitik? Buktikan!

4.3 Integral Fungsi Kompleks

Diberikan fungsi kompleks $f(t) = u(t) + iv(t)$ dimana $u(t)$ dan $v(t)$ merupakan fungsi kontinu pada interval $[a, b]$, maka:

$$\int_a^b f(t)\,dt = \int_a^b u(t)\,dt + i\int_a^b v(t)\,dt$$

Sifat-sifat:

Misalkan fungsi kompleks $f(t) = u(t) + iv(t)$, maka:

1. $\mathrm{Re}\left\{\int_a^b f(t)\,dt\right\} = \int_a^b \mathrm{Re}\{f(t)\}\,dt = \int_a^b u(t)\,dt$
2. $\mathrm{Im}\left\{\int_a^b f(t)\,dt\right\} = \int_a^b \mathrm{Im}\{f(t)\}\,dt = \int_a^b v(t)\,dt$
3. $\int_a^b kf(t)\,dt = k\int_a^b f(t)\,dt$, k adalah konstanta kompleks
4. $\left|\int_a^b f(t)\,dt\right| \leq \int_a^b |f(t)|\,dt$
5. $\int_a^b f(t)\,dt = -\int_b^a f(t)\,dt$

Contoh 1. Tentukan $\mathrm{Re}\left\{\int_0^2 (1+i3t)^2\,dt\right\}$!

Jawab

$$\begin{aligned}
\mathrm{Re}\left\{\int_0^2 (1+i3t)^2\,dt\right\} &= \mathrm{Re}\left\{\int_0^2 1-9t^2+i6t\,dt\right\} \\
&= \int_0^2 \mathrm{Re}\{1-9t^2+i6t\}\,dt \\
&= \int_0^2 1-9t^2\,dt \\
&= t-3t^3|_0^2 \\
&= 2-3(2)^3-0 \\
&= 2-3(8) \\
&= 2-24 \\
&= -22.
\end{aligned}$$

Latihan Soal

1. Tentukan $\mathrm{Re}\left\{\int_0^1 (-2+it)^2\,dt\right\}$!
2. Tentukan $\mathrm{Im}\left\{\int_0^2 (1+i3t)^2\,dt\right\}$!
3. Tentukan $\mathrm{Im}\left\{\int_1^3 (1-i2t)^2\,dt\right\}$!

Panjang Kurva (busur)

Jika *C* adalah kurva dengan parameterisasi $\rho(t) = x(t) + iy(t)$ dimana $t \in [a, b]$, maka panjang kurva *C* adalah:

$$L = \int_a^b \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\, dt.$$

Contoh 2. Tentukan panjang kurva (busur) *C* untuk $z = e^{i2t}$ dimana $0 \le t \le \frac{\pi}{2}$!

Jawab

$z = e^{i2t} = \cos 2t + i \sin 2t,\ 0 \le t \le \frac{\pi}{2}$

- $x(t) = \cos 2t$

  $\frac{dx}{dt} = -2 \sin 2t$
- $y(t) = \sin 2t$

  $\frac{dy}{dt} = 2 \cos 2t$

$$L = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{(-2 \sin 2t)^2 + (2 \cos 2t)^2}\, dt$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{4 \sin^2 2t + 4 \cos^2 2t}\, dt$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{4(\sin^2 2t + \cos^2 2t)}\, dt$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{4(1)}\, dt$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{4}\, dt$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} 2\, dt$$

$$= 2t\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}$$
$$= 2\left(\frac{\pi}{2}\right) - 0$$
$$= \pi.$$

$\therefore$ Jadi panjang kurva (busur) *C* untuk $z = e^{i2t}$, $0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}$ adalah π.

Latihan Soal

1. Tentukan panjang kurva *C* untuk $z = e^{it}$, $0 \leq t \leq \pi$!
2. Carilah $\int_0^{1+i} z^2\, dz$!

DAFTAR PUSTAKA

Kusumawinahyu, W. M. 2017. *Fungsi Kompleks.* UB Press. Malang.