Ahmad Khairul Umam, S.Si., M.Si.
Universitas Billfath

MATEMATIKA TEKNIK 2

A. Operasi Dasar Matematika: Eksponensial, Trigonometri dan Logaritma

a. Eksponensial

Sifat-sifat aljabar:

1. $a^m . a^n = a^{m+n}$
2. $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$
3. $\frac{1}{a^m} = a^{-m}$
4. $(a^m)^n = a^{mn}$

Contoh

1. Sederhanakanlah bentuk aljabar berikut:
   a. $\frac{2^3}{2^{-2}} = 2^3 . 2^2 = 2^{3+2} = 2^5 = 32$
   b. $\frac{3^{-1}}{2^{-2}.3^3} = \frac{2^2}{3^1.3^3} = \frac{2^2}{3^{1+3}} = \frac{2^2}{3^4} = \frac{4}{81}$

Fungsi Eksponensial

Definisi. Fungsi eksponen adalah fungsi yang mempunyai bentuk umum $f(x) = ka^x$ dengan k dan a adalah konstanta, $a > 0$, dan $a \neq 1$.

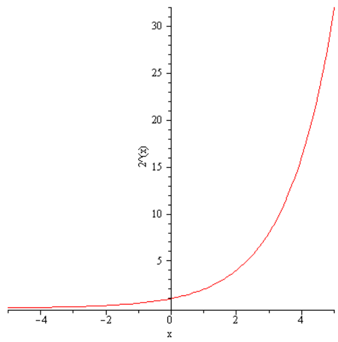
Contoh

a. $f(x) = 2^x$ (Fungsi eksponensial)

b. $g(x) = (1,5)^x$ (Fungsi eksponensial)

Grafik fungsi eksponensial:

$f(x) = 2^x$



Latihan Soal

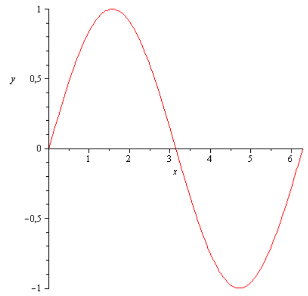
1. Sederhanakanlah bentuk aljabar berikut:
   a. $\frac{2^{-2}3^2}{2^3 3^{-3}}$
   b. $\left(\frac{5^2}{5^{-1}}\right)^2$
   c. $\frac{5^3 2^{-3}}{5^2 2^{-2}}$
   d. $\left(\frac{8^{-1}}{4^{-2}}\right)^2$

b. Trigonometri

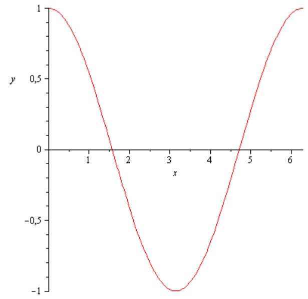
Bentuk trigonometri yaitu $\sin x$, $\cos x$, $\tan x$. Bentuk lain dari $\tan x$ yaitu $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$.

Grafik fungsi trigonometri:

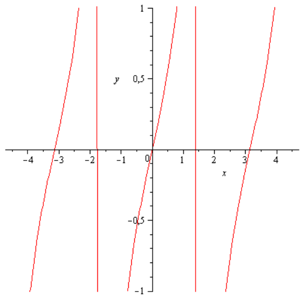
$y = \sin x$



$y = \cos x$



$y = \tan x$



Identitas trigonometri:

$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$

$1 + \tan^2 x = \sec^2 x$

$1 + \cot^2 x = \csc^2 x$

Sudut rangkap trigonometri:

$\sin 2x = 2 \sin x \cos x$

$\cos 2x = 2 \cos^2 x - 1$

$\cos 2x = 1 - 2 \sin^2 x$

$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$

Tabel trigonometri sudut istimewa

Sudut / Trigonometri	$0°$	$30°$	$45°$	$60°$	$90°$
$\sin x$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	1
$\cos x$	1	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\tan x$	0	$\frac{1}{3}\sqrt{3}$	1	$\sqrt{3}$	Tak terdefinisi

Kuadran sudut trigonometri

Kuadran 2 $+\sin x$	Kuadran 1 $+$ ALL
Kuadran 3 $+\tan x$	Kuadran 4 $+\cos x$

Rumus-rumus

Sudut ke radian

$$x\, rad = x° \times \frac{\pi}{180°}\, rad$$

Radian ke sudut

$$x° = x\, rad \times \frac{180°}{\pi\, rad}$$

Contoh

1. Ubahlah sudut $30°$ ke dalam bentuk radian!

   Jawab

   $$x\, rad = 30° \times \frac{\pi}{180°}\, rad = \frac{1}{6}\pi\, rad.$$

2. Ubahlah bentuk radian $\frac{3}{4}\pi\, rad$ ke dalam bentuk sudut!

   Jawab

   $$x° = \frac{3}{4}\pi\, rad \times \frac{180°}{\pi\, rad} = 135°.$$

Latihan Soal

1. Ubahlah sudut-sudut berikut ke dalam bentuk radian:
   a. $60°$
   b. $90°$
   c. $120°$
   d. $225°$
2. Ubahlah bentuk radian berikut ke dalam bentuk sudut
   a. $\frac{1}{4}\pi$ rad
   b. $\frac{2}{5}\pi$ rad
   c. $\frac{5}{6}\pi$ rad
   d. $\frac{5}{4}\pi$ rad

c. Logaritma

Definisi.

$$^{a}\log b = c \Leftrightarrow a^{c} = b$$

Contoh

1. $^{2}\log 8 = 3$
2. $^{3}\log 81 = 4$
3. $\log 100 = 2$

Sifat-sifat Logaritma

1. $^{a}\log a = 1$
2. $^{a}\log 1 = 0$
3. $^{a}\log bc = {}^{a}\log b + {}^{a}\log c$
4. $^{a}\log \frac{b}{c} = {}^{a}\log b - {}^{a}\log c$
5. $^{a}\log b^{n} = n\,{}^{a}\log b$
6. $^{a^{q}}\log b^{p} = \frac{p}{q}\,{}^{a}\log b$
7. $^{a}\log b = \frac{1}{^{b}\log a}$
8. $^{a}\log b = \frac{^{c}\log b}{^{c}\log a}$
9. $^{a}\log b\,.\,{}^{b}\log c = {}^{a}\log c$
10. $a^{{}^{a}\log b^{x}} = x$

Contoh

1. Berapakah nilai dari:
   a. $^{64}\log 16$
   b. $^{\sqrt{3}}\log \frac{1}{27}$

Jawab

a. $^{64}\log 16 = {}^{2^{6}}\log 2^{4} = \frac{4}{6}.{}^{2}\log 2 = \frac{2}{3}.(1) = \frac{2}{3}$.

b. $^{\sqrt{3}}\log \frac{1}{27} = {}^{3^{\frac{1}{2}}}\log 3^{-3} = \frac{-3}{1/2}.{}^{3}\log 3 = -3.\left(\frac{2}{1}\right).\ {}^{3}\log 3 = -6.(1) = -6$.

Latihan Soal

1. Tentukan nilai x jika $^{5}\log x = 3$!
2. Berapakah nilai dari:
   a. $^{2}\log 6 + {}^{2}\log 18 - {}^{2}\log 27$
   b. $\log 18$
3. Tentukan himpunan penyelesaian dari:
   a. $^{3}\log(2\mathrm{x} - 8) = {}^{3}\log 4$
   b. $^{2}\log(x^{2} - x) = {}^{2}\log 2$

B. Matriks : Determinan, Invers, Nilai Eigen dan Vektor Eigen

a. Determinan

Determinan Derajat 2

$$|A| = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$$

Contoh

1. Tentukan nilai determinan dari matriks $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$!

Jawab

$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 1.4 - 2.3 = 4 - 6 = -2$.

Determinan Derajat 3

Metode Sarrus

$$\begin{array}{c} \\ |A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \end{array} \begin{array}{ccc|cc} + & + & + \; - & - & - \\ \hline a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{31} & a_{32} \end{array} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32}$$

$$-[a_{13}a_{22}a_{31} + a_{11}a_{23}a_{32} + a_{12}a_{21}a_{33}]$$

Metode Sarrus hanya boleh dipakai untuk menghitung determinan derajat 3.

Contoh

1. Hitunglah nilai determinan berikut dengan menggunakan Metode Sarrus:

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} \; !$$

Jawab

$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} = 45 + 84 + 96 - (105 + 48 + 72) = 0$.

Metode Ekspansi Kofaktor

Dengan mencari minornya (yaitu menghapus satu baris dan satu kolom yang memuat elemen tersebut)

Jika $i + j$ = genap maka tandanya plus (+)

Jika $i + j$ = ganjil maka tandanya minus (-)

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

a. Ekspansi baris ke-1

$$|A| = a_{11}M_{11} - a_{12}M_{12} + a_{13}M_{13}$$
$$= a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

b. Ekspansi baris ke-2

$$|A| = -a_{21}M_{21} + a_{22}M_{22} - a_{23}M_{23}$$
$$= -a_{21}\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{22}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{23}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

c. Ekspansi baris ke-3

$$|A| = a_{31}M_{31} - a_{32}M_{32} + a_{33}M_{33}$$
$$= a_{31}\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix} - a_{32}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{vmatrix} + a_{33}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

d. Ekspansi kolom ke-1

$|A| = a_{11}M_{11} - a_{21}M_{21} + a_{31}M_{31}$

$= a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{21}\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{31}\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix}$

e. Ekspansi kolom ke-2

$|A| = -a_{12}M_{12} + a_{22}M_{22} - a_{32}M_{32}$

$= -a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{22}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{32}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{vmatrix}$

f. Ekspansi kolom ke-3

$|A| = a_{13}M_{13} - a_{23}M_{23} + a_{33}M_{33}$

$= a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} - a_{23}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} + a_{33}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$

Kita dapat memilih salah satu baris atau salah satu kolom sebagai pedoman, dan nantinya diperoleh hasil yang sama. Sehingga cara a) sampai f) akan menghasilkan nilai yang sama.

Contoh

1. Hitunglah nilai determinan berikut dengan menggunakan metode Ekspansi Kofaktor:

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix}\ !$$

Jawab

$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix}$

Ekspansi baris ke-1

$|A| = a_{11}M_{11} - a_{12}M_{12} + a_{13}M_{13}$

$= a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$

$= 1\begin{vmatrix} 5 & 6 \\ 8 & 9 \end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix} 4 & 6 \\ 7 & 9 \end{vmatrix} + 3\begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 7 & 8 \end{vmatrix}$

$= 1(45 - 48) - 2(36 - 42) + 3(32 - 35)$

$= 1(-3) - 2(-6) + 3(-3)$

$= -3 + 12 - 9$

$= 0$

Latihan Soal

1. Hitunglah nilai determinan berikut dengan menggunakan Metode Sarrus:

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 1 & 6 \\ -1 & 3 & 2 \end{vmatrix}\ !$$

2. Hitunglah nilai determinan berikut dengan menggunakan Metode Ekspansi Kofaktor:

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 5 & -5 \\ -2 & 3 & 6 \\ 1 & 3 & 4 \end{vmatrix}$$

3. Carilah nilai determinan berikut menggunakan Metode Sarrus dan Metode Ekspansi Kofaktor:

a. $|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 3 \\ 1 & 0 & 8 \end{vmatrix}$

b. $|B| = \begin{vmatrix} 3 & 7 & 3 \\ -2 & 8 & -2 \\ 1 & -12 & 1 \end{vmatrix}$

b. Invers Matriks

Definisi

Jika A adalah matriks maka

$$A^{-1} = \frac{1}{det.A} \times Adj.A = \frac{1}{|A|} \times Adj.A.$$

Invers Matrik Derajat 2

Contoh

1. Tentukan invers dari matriks $A = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$!

Jawab

$|A| = \begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 3.3 - 5.2 = 9 - 10 = -1$

$Adj.A = \begin{pmatrix} 3 & -5 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$

$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \times Adj.A = \frac{1}{-1} \times \begin{pmatrix} 3 & -5 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 5 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}$

Latihan Soal

1. Tentukan invers dari matriks-matriks:
   a. $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}$
   b. $B = \begin{pmatrix} 8 & 1 \\ 7 & 6 \end{pmatrix}$

Invers Matriks Derajat 3

Contoh

1. Tentukan invers dari matriks $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 5 \\ 1 & 5 & 12 \end{pmatrix}$!

Jawab

Deteriminan dari matriks A adalah

$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 5 \\ 1 & 5 & 12 \end{vmatrix}$

Ekspansi kolom ke-1

$|A| = a_{11}M_{11} - a_{21}M_{21} + a_{31}M_{31}$

$= a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{21}\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{31}\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix}$

$= 1\begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 5 & 12 \end{vmatrix} - 1\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 12 \end{vmatrix} + 1\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 5 \end{vmatrix}$

$= 1(36 - 25) - 1(24 - 15) + 1(10 - 9)$

$= 11 - 9 + 1$

$= 3$

Kofaktor-kofaktor dari matriks A:

$K_{11} = \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 5 & 12 \end{vmatrix} = 3.12 - 5.5 = 36 - 25 = 11$

$K_{12} = -\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 1 & 12 \end{vmatrix} = -(1.12 - 5.1) = -(12 - 5) = -7$

$K_{13} = \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} = 1.5 - 3.1 = 5 - 3 = 2$

$K_{21} = -\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 12 \end{vmatrix} = -(2.12 - 3.5) = -(24 - 15) = -9$

$K_{22} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 12 \end{vmatrix} = 1.12 - 3.1 = 12 - 3 = 9$

$K_{23} = -\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} = -(1.5 - 2.1) = -(5 - 2) = -3$

$K_{31} = \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} = 2.5 - 3.3 = 10 - 9 = 1$

$K_{32} = -\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} = -(1.5 - 3.1) = -(5 - 3) = -2$

$K_{33} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 1.3 - 2.1 = 3 - 2 = 1$

Matriks Kofaktor dari matriks A:

$$K = \begin{pmatrix} 11 & -7 & 2 \\ -9 & 9 & -3 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

Sehingga untuk Adjoin matriks A adalah

$$Adj.A = K^T = \begin{pmatrix} 11 & -9 & 1 \\ -7 & 9 & -2 \\ 2 & -3 & 1 \end{pmatrix}$$

Jadi Invers dari matriks A adalah:

$\therefore\ A^{-1} = \frac{1}{|A|} \times Adj.A = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 11 & -9 & 1 \\ -7 & 9 & -2 \\ 2 & -3 & 1 \end{pmatrix}.$

Latihan Soal

1. Tentukan invers dari matriks-matriks:

   a. $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 3 \\ 1 & 0 & 8 \end{pmatrix}$

   b. $B = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 0 & 4 & 5 \\ -2 & 1 & 4 \end{pmatrix}$

   c. $B = \begin{pmatrix} 8 & -3 & -5 \\ 0 & 1 & 2 \\ 4 & -7 & 6 \end{pmatrix}$

c. Nilai Eigen dan Vektor Eigen

Definisi

Diberikan matriks $A_{n\times n}$ dan vektor $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$. Jika $A\bar{x} = \lambda\bar{x}$, maka λ disebut nilai eigen dari A dan $\bar{x}$ disebut vektor eigen terkait dengan λ.

Dari persamaan $A\bar{x} = \lambda\bar{x}$, diperoleh:

$$A\bar{x} = \lambda\bar{x}$$
$$A\bar{x} - \lambda\bar{x} = 0$$
$$(A - \lambda I)\bar{x} = 0$$

Agar λ menjadi nilai eigen, maka paling tidak ada satu solusi tak nol dari persamaan $(A - \lambda I)\bar{x} = 0$. Persamaan $(A - \lambda I)\bar{x} = 0$ mempunyai solusi tak nol jika dan hanya jika $\det(A - \lambda I) = 0$ atau $\det(\lambda I - A) = 0$. $\det(\lambda I - A) = 0$ disebut persamaan karakteristik matriks A dan merupakan polinomial derajat n, sehingga mempunyai sebanyak n nilai λ.

Contoh

1. Tentukan nilai eigen dan vektor eigen dari matriks:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Jawab

Nilai eigen:

$|\lambda I - A| = 0$

$$\left| \lambda \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix} \right| = 0$$

$$\left| \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix} \right| = 0$$

$$\left| \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 2 \\ -1 & \lambda - 2 & -1 \\ -1 & 0 & \lambda - 3 \end{pmatrix} \right| = 0$$

$$\begin{vmatrix} \lambda & 0 & 2 \\ -1 & \lambda - 2 & -1 \\ -1 & 0 & \lambda - 3 \end{vmatrix} = 0$$

$$\lambda \begin{vmatrix} \lambda - 2 & -1 \\ 0 & \lambda - 3 \end{vmatrix} - 0 \begin{vmatrix} -1 & -1 \\ -1 & \lambda - 3 \end{vmatrix} + 2 \begin{vmatrix} -1 & \lambda - 2 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

$\lambda[(\lambda - 2)(\lambda - 3) + 0] + 0 + 2[0 + (\lambda - 2)] = 0$

$\lambda(\lambda - 2)(\lambda - 3) + 2(\lambda - 2) = 0$

$(\lambda - 2)[\lambda(\lambda - 3) + 2] = 0$

$(\lambda - 2)(\lambda^2 - 3\lambda + 2) = 0$

$(\lambda - 2)(\lambda - 2)(\lambda - 1) = 0$

$\therefore$ Jadi nilai eigen matriks A adalah $\lambda_1 = 2, \lambda_2 = 2$ dan $\lambda_3 = 1$.

Vektor eigen

$(\lambda I - A)\bar{x} = 0$

(Untuk $\boldsymbol{\lambda = 2}$)

$$\begin{pmatrix} \lambda & 0 & 2 \\ -1 & \lambda - 2 & -1 \\ -1 & 0 & \lambda - 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ -1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Diperoleh:

$2x_1 + 2x_3 = 0$

$x_1 = -x_3$

Misalkan $x_2 = s$ dan $x_3 = t$, maka

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -t \\ s \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ s \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -t \\ 0 \\ t \end{pmatrix} = s \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$\therefore$ Jadi vektor eigennya adalah

$$\bar{u} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \bar{v} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

(Untuk $\lambda = 1$)

$$\begin{pmatrix} \lambda & 0 & 2 \\ -1 & \lambda - 2 & -1 \\ -1 & 0 & \lambda - 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Diperoleh:

- $x_1 + 2x_3 = 0$

  $x_1 = -2x_3$
- $-x_1 - x_2 - x_3 = 0$

  $x_2 = -x_1 - x_3$

  $x_2 = -(-2x_3) - x_3$

  $x_2 = 2x_3 - x_3$

  $x_2 = x_3$

Misalkan $x_3 = s$, maka

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2s \\ s \\ s \end{pmatrix} = s \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$\therefore$ Jadi vektor eigennya adalah

$$\overline{w} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Latihan Soal

1. Tentukan nilai eigen dari matriks-matriks berikut:

   a. $A = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 \\ -6 & -2 & 0 \\ 19 & 5 & -4 \end{pmatrix}$

   b. $B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -1 & 4 & -1 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$

2. Tentukan nilai eigen dan vektor eigen dari matriks-matriks berikut:

   a. $A = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 2 \\ 2 & 4 & 2 \\ 2 & 2 & 4 \end{pmatrix}$

   b. $B = \begin{pmatrix} 5 & 6 & 2 \\ 0 & -1 & -8 \\ 1 & 0 & -2 \end{pmatrix}$

   c. $C = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

C. Sistem Persamaan Linear

a. Aturan Cramer

Misalkan diketahui n persamaan dengan n variabel.

$$\begin{gathered}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = h_1 \\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = h_2 \\
\vdots \\
\vdots \\
a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = h_n
\end{gathered}$$

Aturan Cramer hanya bisa diselesaikan jika bentuk determinan dari Sistem Persamaan Linear (SPL) tersebut tidak sama dengan nol, yaitu:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix} \neq 0.$$

Jika syarat tersebut terpenuhi, maka selanjutnya ditentukan Δ_{x_k} dengan $k = 1,2,3,\ldots,n$.

$$\Delta_{x_1} = \begin{vmatrix} h_1 & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ h_2 & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ h_n & a_{n2} & a_{n3} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$\Delta_{x_2} = \begin{vmatrix} a_{11} & h_1 & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & h_2 & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & h_n & a_{n3} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$\Delta_{x_n} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & h_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & h_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \ldots & h_n \end{vmatrix}$$

$$\therefore\ x_n = \frac{\Delta_{x_n}}{\Delta}.$$

Contoh

1. Selesaikan SPL berikut dengan menggunakan aturan Cramer:

$$\begin{gathered} x - y - z = 0 \\ 5x + 5z = 0 \\ 10y - 5z = 20. \end{gathered}$$

Jawab

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 5 & 0 & 5 \\ 0 & 10 & -5 \end{vmatrix} = \begin{array}{c} + \quad + \quad + \ - \quad - \quad - \\ \left|\begin{matrix} 1 & -1 & -1 \\ 5 & 0 & 5 \\ 0 & 10 & -5 \end{matrix}\right| \begin{matrix} 1 & -1 \\ 5 & 0 \\ 0 & 10 \end{matrix} \end{array}$$

$$= (1)(0)(-5) + (-1)(5)(0) + (-1)(5)(10) — 1(0)(0) - (1)(5)(10) — 1(5)(-5)$$

$$= 0 + 0 - 50 + 0 - 50 - 25 = -125$$

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 5 \\ 20 & 10 & -5 \end{vmatrix} = \begin{array}{c} + \quad + \quad + \ - \quad - \quad - \\ \left|\begin{matrix} 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 5 \\ 20 & 10 & -5 \end{matrix}\right| \begin{matrix} 0 & -1 \\ 0 & 0 \\ 20 & 10 \end{matrix} \end{array}$$

$$= (0)(0)(-5) + (-1)(5)(20) + (-1)(0)(10) — 1(0)(20) - (0)(5)(10) — 1(0)(-5)$$

$$= 0 - 100 + 0 + 0 + 0 + 0 = -100$$

$$\begin{array}{ccccc} & & + & + & +\;-\;\;-\;\;- \end{array}$$

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 5 & 0 & 5 \\ 0 & 20 & -5 \end{vmatrix} = \left|\begin{array}{ccc|cc} 1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 5 & 0 & 5 & 5 & 0 \\ 0 & 20 & -5 & 0 & 20 \end{array}\right.$$

$$= (1)(0)(-5) + (0)(5)(0) + (-1)(5)(20) — 1(0)(0) - (1)(5)(20) - (0)(5)(-5)$$

$$= 0 + 0 - 100 + 0 - 100 + 0 = -200$$

$$\begin{array}{ccccc} & & + & + & +\;-\;\;-\;\;- \end{array}$$

$$\Delta_z = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 5 & 0 & 0 \\ 0 & 10 & 20 \end{vmatrix} = \left|\begin{array}{ccc|cc} 1 & -1 & 0 & 1 & -1 \\ 5 & 0 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & 10 & 20 & 0 & 10 \end{array}\right.$$

$$= (1)(0)(20) + (-1)(0)(0) + (0)(5)(10) - (0)(0)(0) - (1)(0)(10) — 1(5)(20)$$

$$= 0 + 0 + 0 + 0 + 0 + 100 = 100$$

$$\therefore x = \frac{\Delta_x}{\Delta} = \frac{-100}{-125} = \frac{4}{5}\, , y = \frac{\Delta_y}{\Delta} = \frac{-200}{-125} = \frac{8}{5}, \text{dan } z = \frac{\Delta_z}{\Delta} = \frac{100}{-125} = -\frac{4}{5}.$$

Latihan Soal

1. Selesaikan SPL berikut dengan menggunakan aturan Cramer:
   a. $x + y + z = 6$
      $x + 2y + 3z = 14$
      $x + 4y + 9z = 36$
   b. $2x + 2z = 1$
      $3x - y + 4z = 7$
      $6x + y - z = 0$
   c. $x + y + 2z = 9$
      $2x + 4y - 3z = 1$
      $3x + 6y - 5z = 0$

b. Penyelesaian Menggunakan Invers Matriks

Misalkan diketahui n persamaan dengan n variabel.

$$\begin{gathered} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = h_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = h_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = h_n \end{gathered}$$

Dengan menggunakan konsep pergandaan matriks maka sistem persamaan di atas dapat ditulis dalam bentuk matriks sebagai berikut.

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ . \\ . \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \\ . \\ . \\ h_n \end{pmatrix}$$

$$AX = H$$

Dengan

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}, X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ . \\ . \\ x_n \end{pmatrix}, H = \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \\ . \\ . \\ h_n \end{pmatrix}$$

Dari $AX = H$, jika A mempunyai invers A^{-1} maka:

$$AX = H$$
$$A^{-1}AX = A^{-1}H$$
$$IX = A^{-1}H$$
$$X = A^{-1}H$$

Contoh

1. Selesaikan sistem persamaan berikut dengan invers matriks:

$$x + y + z = 6$$
$$x + 2y + 3z = 14$$
$$x + 4y + 9z = 36$$

Jawab

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 9 \end{pmatrix}, X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, H = \begin{pmatrix} 6 \\ 14 \\ 36 \end{pmatrix}$$

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 9 \end{vmatrix} = 1\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 9 \end{vmatrix} - 1\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 9 \end{vmatrix} + 1\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = (18 - 12) - (9 - 3) + (4 - 2)$$
$$= 18 - 12 - 9 + 3 + 4 - 2 = 2$$

$$K_{11} = \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 9 \end{vmatrix} = 2.9 - 3.4 = 18 - 12 = 6$$
$$K_{12} = -\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 9 \end{vmatrix} = -(1.9 - 3.1) = -(9 - 3) = -6$$
$$K_{13} = \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = 1.4 - 2.1 = 4 - 2 = 2$$
$$K_{21} = -\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 9 \end{vmatrix} = -(1.9 - 1.4) = -(9 - 4) = -5$$
$$K_{22} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 9 \end{vmatrix} = 1.9 - 1.1 = 9 - 1 = 8$$
$$K_{23} = -\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = -(1.4 - 1.1) = -(4 - 1) = -3$$
$$K_{31} = \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 1.3 - 1.2 = 3 - 2 = 1$$
$$K_{32} = -\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = -(1.3 - 1.1) = -(3 - 1) = -2$$
$$K_{33} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 1.2 - 1.1 = 2 - 1 = 1$$

$$K = \begin{pmatrix} 6 & -6 & 2 \\ -5 & 8 & -3 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}, \qquad Adj.A = K^T = \begin{pmatrix} 6 & -5 & 1 \\ -6 & 8 & -2 \\ 2 & -3 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \times Adj.A = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 6 & -5 & 1 \\ -6 & 8 & -2 \\ 2 & -3 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\therefore X = A^{-1}H = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 6 & -5 & 1 \\ -6 & 8 & -2 \\ 2 & -3 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 6 \\ 14 \\ 36 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 36 - 70 + 36 \\ -36 + 112 - 72 \\ 12 - 42 + 36 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Latihan Soal

1. Selesaikan SPL berikut dengan menggunakan metode invers matriks:

$$2x + 2z = 1$$
$$3x - y + 4z = 7$$
$$6x + y - z = 0$$

c. Metode Augmented Matriks

Untuk mendapatkan penyelesaian dari persamaan $AX = H$, dengan transformasi baris elementer matriks $[AH]$. Ubah matriks A menjadi matriks segitiga atas sehingga diperoleh nilai X.

Contoh

1. Selesaikan sistem persamaan berikut dengan metode augmented matriks:

$$x + y + z = 6$$
$$x + 2y + 3z = 14$$
$$x + 4y + 9z = 36$$

Jawab

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 9 \end{pmatrix}, X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, H = \begin{pmatrix} 6 \\ 14 \\ 36 \end{pmatrix}$$

Bentuk matriks $[AH]$,

$$[AH] = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 1 & 2 & 3 & 14 \\ 1 & 4 & 9 & 36 \end{bmatrix}$$

Kemudian direduksi menjadi matriks segitiga atas,

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 1 & 2 & 3 & 14 \\ 1 & 4 & 9 & 36 \end{bmatrix}$$

Baris ke-2 dikurangi baris ke-1, menjadi

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 0 & 1 & 2 & 8 \\ 1 & 4 & 9 & 36 \end{bmatrix}$$

Baris ke-3 dikurangi baris ke-1, menjadi

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 0 & 1 & 2 & 8 \\ 0 & 3 & 8 & 30 \end{bmatrix}$$

Baris ke-3 dikurangi 3×(baris ke-2), menjadi

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 0 & 1 & 2 & 8 \\ 0 & 0 & 2 & 6 \end{bmatrix}$$

∴ Dari baris ke-3: $2z = 6$, maka $z = 3$

Dari baris ke-2: $y + 2z = 8$, maka $y = 2$

Dari baris ke-1: $x + y + z = 6$, mka $x = 1$

Latihan Soal

1. Selesaikan SPL berikut dengan menggunakan metode augmented matriks:

$$x + y + z = 5$$
$$x + y + 4z = 10$$
$$-4x + y + z = 0$$

d. Eselon Baris Tereduksi

Suatu matriks sembarang dapat dibuat menjadi matriks eselon baris tereduksi dengan menggunakan OBE (Operasi Baris Elementer).

Sifat-sifat eselon baris tereduksi

1. Jika pada suatu baris entrinya (nilainya) tidak terdiri dari nol saja, maka bilangan tak nol pertama adalah 1, dan disebut dengan 1 utama.
2. Jika terdapat suatu baris yang semua entrinya nol, maka taruh pada baris paling bawah.
3. Jika dalam dua baris yang berurutan yang semua entrinya tidak nol saja, maka letak 1 utama pada baris kedua lebih ke kanan dari baris pertama. Demikian juga letak 1 utama pada baris ke-4 lebih ke kanan dari baris kedua maupun baris ke-3.
4. Jika pada suatu kolom memuat 1 utama, maka di bawah atau di atas 1 utama entrinya adalah nol.

Jika suatu matriks memenuhi sifat 1-3, maka disebut bentuk eselon baris. Sedangkan, jika matriks memenuhi sifat 1-4, maka disebut bentuk eselon baris tereduksi.

Contoh

1. Matriks berikut merupakan contoh dari matriks yang berbentuk eselon baris, dan akan ditentukan penyelesaian dari SPL tersebut:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 & 16 \\ 0 & 1 & 2 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

2. Matriks-matriks berikut merupakan contoh matriks yang berbentuk eselon baris tereduksi, dan akan ditentukan penyelesaian dari masing-masing SPL:

a. $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 9 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ b. $C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ c. $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$

Penjelasan

1.
$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cccc} x & y & z & h \end{array} \\ A = & \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 & 16 \\ 0 & 1 & 2 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \end{array}$$

- $z = 2$
- $y + 2z = 6$
  $y + 2(2) = 6$
  $y + 4 = 6$
  $y = 6 - 4$
  $y = 2$
- $x + 3y + 4z = 16$
  $x + 3(2) + 4(2) = 16$
  $x + 6 + 8 = 16$
  $x + 14 = 16$
  $x = 16 - 14$
  $x = 2$

$\therefore$ Jadi $x = 2, y = 2$ dan $z = 2$.

2. a.

$$\begin{array}{c} \\ B = \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{cccc} x & y & z & h \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 9 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix} \end{array}$$

$\therefore$ Jadi $x = 9, y = 2$ dan $z = 3$.

b.

$$\begin{array}{c} \\ C = \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{cccc} x & y & z & h \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

- $x = 4$
- $y + 2z = 7$

  $y = 7 - 2z$

Karena nilai y tergantung dari nilai z, maka dapat disimpulkan bahwa SPL tersebut memiliki tak berhingga banyak penyelesaian.

c.

$$\begin{array}{c} \\ D = \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{cccc} x & y & z & h \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{pmatrix} \end{array}$$

- $x = 0$
- $y - 6z = 0$

  $y = 6z$
- $0x + 0y + 0z = 5$

Tidak ada yang memenuhi. Jadi SPL tidak memiliki penyelesaian.

Prosedur mereduksi matriks menjadi eselon baris tereduksi

1. Letakkan entri (nilai) yang paling sederhana pada kolom pertama (paling kiri).
2. Tukarkan baris yang satu dengan yang lain, jika perlu.
3. Kalikan dengan konstanta tertentu untuk memperoleh 1 utama.
4. Gunakan OBE untuk memperoleh nol di bawah 1 utama.
5. Ulangi untuk kolom berikutnya (kolom 2, 3, dst).
6. Selanjutnya ulangi, dengan cara mulai dari kolom paling kanan, untuk mendapatkan nol di atas 1 utama.

Jika suatu matriks direduksi dengan prosedur 1-5, maka disebut Eliminasi Gauss. Sedangkan, jika matriks direduksi dengan prosedur 1-6, maka disebut Eliminasi Gauss-Jourdan.

Contoh

1. Selesaikan SPL berikut dengan Metode Gauss-Jourdan:

$$-2x_3 + 7x_5 = 12$$
$$2x_1 + 4x_2 - 10x_3 + 6x_4 + 12x_5 = 28$$
$$2x_1 + 4x_2 - 5x_3 + 6x_4 - 5x_5 = -1.$$

Jawab

$$\begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & h \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & 0 & -2 & 0 & 7 & 12 \\ 2 & 4 & -10 & 6 & 12 & 28 \\ 2 & 4 & -5 & 6 & -5 & -1 \end{pmatrix} \end{array} \underset{\sim}{b_1 = b_2} \begin{pmatrix} 2 & 4 & -10 & 6 & 12 & 28 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & 7 & 12 \\ 2 & 4 & -5 & 6 & -5 & -1 \end{pmatrix} \underset{\sim}{\frac{b_1}{2}} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -5 & 3 & 6 & 14 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & 7 & 12 \\ 2 & 4 & -5 & 6 & -5 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\underset{\sim}{b_3 - 2b_1} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -5 & 3 & 6 & 14 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & 7 & 12 \\ 0 & 0 & 5 & 0 & -17 & -29 \end{pmatrix} \underset{\sim}{\frac{b_2}{-2}} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -5 & 3 & 6 & 14 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -\frac{7}{2} & -6 \\ 0 & 0 & 5 & 0 & -17 & -29 \end{pmatrix}$$

$$b_3 - 5b_2 \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & -5 & 3 & 6 & 14 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -\frac{7}{2} & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix} 2b_3 \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & -5 & 3 & 6 & 14 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -\frac{7}{2} & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$b_2 + \frac{7}{2}b_3 \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & -5 & 3 & 6 & 14 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} b_1 - 6b_3 \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & -5 & 3 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$b_1 + 5b_2 \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 & 0 & 7 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

- $x_5 = 2$
- $x_3 = 1$
- $x_1 + 2x_2 + 3x_4 = 7$

  $x_1 = 7 - 2x_2 - 3x_4$

Misalkan $x_2 = s$ dan $x_4 = t$, maka diperoleh:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 - 2s - 3t \\ s \\ 1 \\ t \\ 2 \end{pmatrix}$$

∴ Karena x_1 tergantung dari nilai s dan t, maka dapat disimpulkan bahwa SPL tersebut memiliki tak berhingga banyak penyelesaian.

Latihan Soal

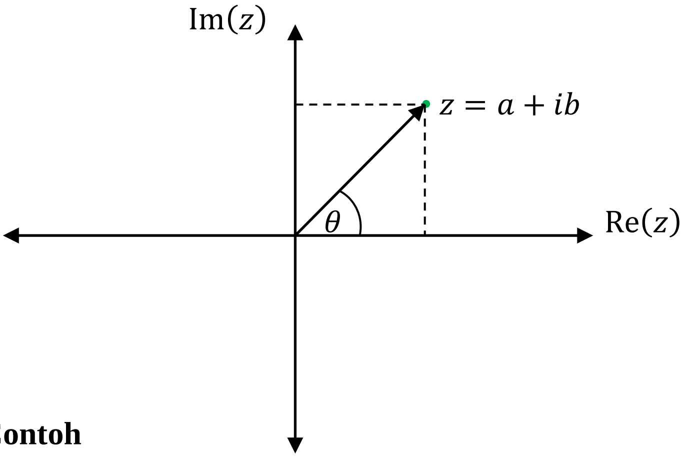
1. Selesaikan SPL berikut dengan metode Gauss-Jourdan:
   a. $x + y + 2z = 9$
      $2x + 4y - 3z = 1$
      $3x + 6y - 5z = 0$
   b. $x + y + z = 5$
      $x + y + 4z = 10$
      $-4x + y + z = 0$
   c. $x - y - z = 0$
      $5x + 5z = 10$
      $10y - 5z = 20$
   d. $x + y + z = 0$
      $4x + 5y + 8z = 0$
      $7x + 8y + 9z = 0$
   e. $2x - 5y + 2z = 7$
      $x + 2y - 4z = 3$
      $3x - 4y - 6z = 5$

D. Sistem Bilangan Kompleks

$\mathbb{C}$ = Himpunan Bilangan Kompleks = $\{z = a + ib \mid a, b \in \mathbb{R} \text{ dan } i = \sqrt{-1}\}$
Bilangan Kompleks = $z = a + ib$, konjugatnya adalah $\bar{z} = a - ib$.

Contoh
Bilangan Kompleks $z = -2 + 3i$, konjugatnya adalah $\bar{z} = -2 - 3i$.

Bidang Argan $\mathbb{C}$



Contoh
1. Tulislah bilangan kompleks dan konjugatnya pada bidang Argan:
   a. $z = -2 - 3i$
   b. $z = 5i$

Bilangan Kompleks $z = a + ib$
Modulus bilangan kompleks $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$
Argumen adalah sudut pada bilangan kompleks disingkat $arg(z)$ dimana:

$$\cos\theta = \frac{a}{|z|} \text{ dan } \sin\theta = \frac{b}{|z|}$$

Contoh
1. Berapakah modulus dari bilangan-bilangan kompleks:
   a. $z = 5 - 2i$
   b. $z = 10$
   c. $z = -2 + 2i$
   d. $z = \sqrt{3} - i$
   e. $z = -2 - 8i$
2. Carilah $arg(z)$ dari bilangan kompleks berikut:
   a. $z = 3i$
   b. $z = 2 + 3i$
   c. $z = 1$

Misalkan modulus $|z|$ ditulis r, maka:
$a = r\cos\theta$
$b = r\sin\theta$
Untuk bilangan kompleks z menjadi:
$z = a + ib = r\cos\theta + ir\sin\theta = r(\cos\theta + i\sin\theta) = r\mathrm{cis}\theta = re^{i\theta}$
Contoh
1. Buktikan bahwa $e^{i\pi} + 1 = 0$!

Misalkan $z = a + ib$ dan $w = c + id$. Operasi pada dua bilangan kompleks z dan w yaitu:

1. $z + w = a + ib + c + id = (a + c) + i(b + d)$
2. $z - w = a + ib - (c + id) = a + ib - c - id = (a - c) + i(b - d)$
3. $zw = (a + ib)(c + id) = ac + iad + ibc - bd = (ac - bd) + i(ad + bc)$
4. $\frac{z}{w} = \frac{a+ib}{c+id} = \frac{a+ib}{c+id} \times \frac{c-id}{c-id} = \frac{ac-iad+ibc+bd}{c^2+d^2} = \frac{ac+bd+i(bc-ad)}{c^2+d^2} = \frac{ac+bd}{c^2+d^2} + i\frac{bc-ad}{c^2+d^2}$

Contoh

1. Nyatakan bilangan kompleks berikut dalam bentuk $a + ib$:
   a. $(5 - 2i) + (2 + 3i)$
   b. $(2 - i) + (5 + 2i)$
   c. $(1 + 2i)(3 + 4i)$
   d. $(2 + 3i)(4 - i)$
   e. $(1 + 2i)(3 + 4i)$
   f. $\frac{1}{3-2i}$
   g. $\frac{3+2i}{3-2i}$

Bentuk Polar

$z = a + ib = r\cos\theta + ir\sin\theta = r(\cos\theta + i\sin\theta) = r\,\mathrm{cis}\,\theta = re^{i\theta}$ dimana $-\pi < \theta \leq \pi$.

Contoh Soal

1. Nyatakan bilangan kompleks $z = 1 - i$ dalam bentuk polarnya!

Jawab

$$r = |z| = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{1^2 + (-1)^2} = \sqrt{1 + 1} = \sqrt{2}$$

$$\cos\theta = \frac{a}{|z|} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \times \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\theta = \cos^{-1}\frac{\sqrt{2}}{2} = -45° = -\frac{\pi}{4}$$

$\therefore$ Jadi bentuk polarnya adalah $z = re^{i\theta} = \sqrt{2}e^{-\frac{\pi}{4}i}$

Latihan Soal

1. Nyatakan bilangan kompleks berikut dalam bentuk polarnya:
   a. $z = -1$
   b. $z = -2 + 2i$
   c. $z = 3$
   d. $z = -4i$
   e. $z = i\sqrt{3}$
   f. $z = 2 - 3i$

Daftar Pustaka

Andari, Ari. 2017. *Aljabar Linear Elementer.* UB Press. Malang.

Kusumawinahyu, W. M. 2017. *Fungsi Kompleks.* UB Press. Malang.