

KALKULUS 1

Beberapa himpunan bilangan:

Himpunan bilangan asli = $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$

Himpunan bilangan bulat = $\mathbb{Z} = \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}$

Himpunan bilangan real = \mathbb{R}

Himpunan bilangan rasional = $\mathbb{Q} = \left\{\frac{a}{b} \mid a, b \in \mathbb{Z}, b \neq 0\right\}$

Himpunan bilangan kompleks = $\mathbb{C} = \{a + ib \mid a, b \in \mathbb{R}, i = \sqrt{-1}\}$

Pertidaksamaan

Operator-operator pada pertidaksamaan yaitu: $<, \leq, >, \geq$

Contoh

1. Selesaikan pertidaksamaan berikut dan gambarkan solusinya pada garis bilangan:

a. $2x - 7 < 4x - 2$

b. $4x - 10 < 2x - 2$

c. $-2 < 2x < 4$

d. $-4 < 3x + 2 < 5$

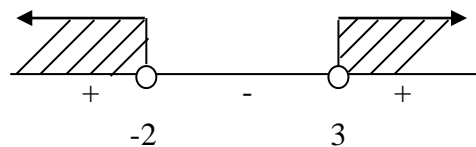
e. $-3 < 1 - 6x \leq 4$

2. Tentukan himpunan penyelesaian dari pertidaksamaan:

a. $x^2 - x - 6 > 0$

Jawab

$$\begin{aligned}x^2 - x - 6 &> 0 \\(x - 3)(x + 2) &> 0 \\x_1 = 3 \text{ atau } x_2 = -2\end{aligned}$$



HP : $x < -2$ atau $x > 3$

b. $x^2 - x - 12 < 0$

c. $x^2 - 3x - 10 > 0$

d. $x^2 + 5x - 24 < 0$

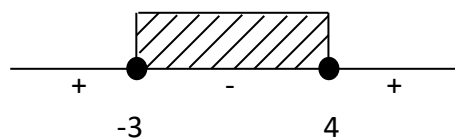
e. $3x^2 - x - 2 > 0$

3. Carilah himpunan penyelesaian dari pertidaksamaan berikut:

a. $x^2 - x - 12 \leq 0$

Jawab

$$\begin{aligned}x^2 - x - 12 &\leq 0 \\(x - 4)(x + 3) &\leq 0 \\x_1 = 4 \text{ atau } x_2 = -3\end{aligned}$$



HP : $-3 \leq x \leq 4$

b. $4x^2 - 5x - 6 \leq 0$

- c. $2x^2 + 5x - 3 \geq 0$
- d. $(x + 1)^2 < 0$
- e. $(x - 2)^2 \geq 0$
- f. $(x + 1)(x - 1)^2 \leq 0$
- g. $(2x + 3)(3x - 1)(x - 2) \leq 0$

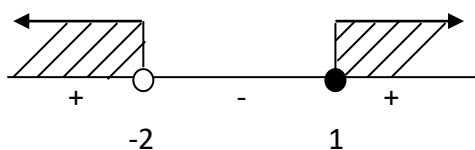
4. Tentukan himpunan penyelesaian dari:

a. $\frac{x-1}{x+2} \geq 0$

Jawab

$$\frac{x-1}{x+2} \geq 0$$

$$x_1 = 1 \text{ atau } x_2 = -2$$



HP : $x < -2$ atau $x \geq 1$

- b. $\frac{1}{3x-2} \leq 4$
- c. $\frac{x+4}{x-3} \leq 0$
- d. $\frac{x^2-3x+1}{x^2+2x} \leq -\frac{2}{x+2}$
- e. $\frac{2x+9}{x-4} \leq 1$

Nilai Mutlak

Definisi.

$$|x| = \begin{cases} x, & x \geq 0 \\ -x, & x < 0 \end{cases}$$

Sifat-sifat nilai mutlak:

1. $|ab| = |a||b|$
2. $\left|\frac{a}{b}\right| = \frac{|a|}{|b|}$
3. $|a + b| \leq |a| + |b|$ (pertidaksamaan segitiga)
4. Untuk $a > 0$
 - a. $|x| < a \Leftrightarrow -a < x < a$
 - b. $|x| > a \Leftrightarrow x < -a \text{ atau } x > a$

Contoh

1. Tentukan himpunan penyelesaian dari pertidaksamaan nilai mutlak:

a. $|x - 2| \geq 5$

Jawab

$$|x - 2| \geq 5$$

$$|x - 2|^2 \geq 5^2$$

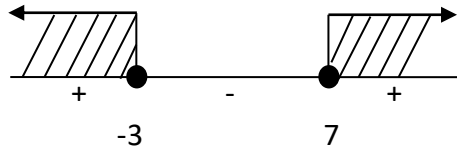
$$(x - 2)^2 \geq 25$$

$$x^2 - 4x + 4 \geq 25$$

$$x^2 - 4x - 21 \geq 0$$

$$(x - 7)(x + 3) \geq 0$$

$$x_1 = 7 \text{ atau } x_2 = -3$$

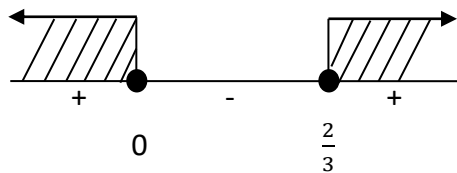


HP : $x \leq -3$ atau $x \geq 7$

b. $|2x - 1| \geq |x - 1|$

Jawab

$$\begin{aligned}
 |2x - 1| &\geq |x - 1| \\
 |2x - 1|^2 &\geq |x - 1|^2 \\
 (2x - 1)^2 &\geq (x - 1)^2 \\
 4x^2 - 4x + 1 &\geq x^2 - 2x + 1 \\
 3x^2 - 2x &\geq 0 \\
 x(3x - 2) &\geq 0 \\
 x_1 = 0 &\text{ atau } x_2 = \frac{2}{3}
 \end{aligned}$$



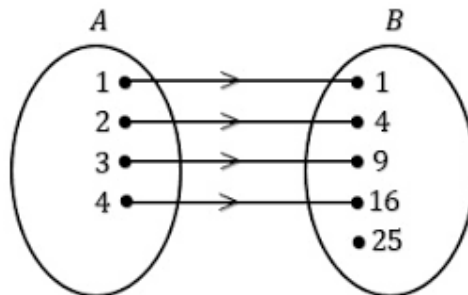
HP : $x \leq 0$ atau $x \geq \frac{2}{3}$

- c. $|2x - 5| < 5$
- d. $|4x + 5| \leq 10$
- e. $|2x - 1| < 1$
- f. $|5x - 6| > 1$
- g. $|x + 5| > |x - 2|$
- h. $|3x - 1| < |2x + 1|$
- i. $|3x - 1| < 2|x - 6|$

Fungsi

Fungsi adalah relasi khusus yang memetakan setiap anggota himpunan A tepat satu ke anggota himpunan B. Fungsi $f(x)$ artinya nilai fungsi f di x .

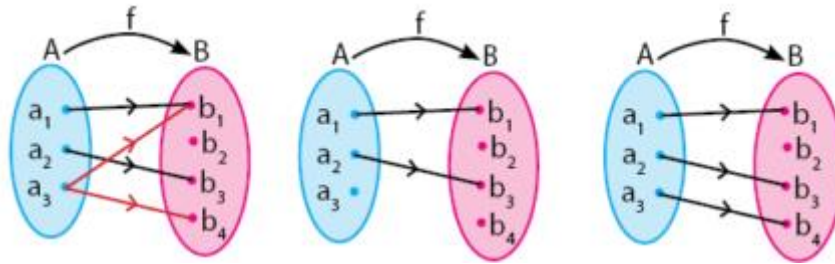
Contoh



Himpunan $A = \{1, 2, 3, 4\}$ disebut daerah asal (domain), himpunan $B = \{1, 4, 9, 16, 25\}$ disebut daerah kawan (kodomain), dan himpunan $\{1, 4, 9, 16\}$ disebut daerah hasil (range).

Latihan Soal

1. Tentukan apakah gambar berikut fungsi atau bukan:



Operasi pada fungsi:

Misalkan $f(x)$ dan $g(x)$ sama-sama fungsi, maka memenuhi operasi-operasi berikut:

1. $(f + g)(x) = f(x) + g(x)$
2. $(f - g)(x) = f(x) - g(x)$
3. $(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x)$
4. $\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$

Contoh

1. Diberikan fungsi $f(x) = x + 3$ dan $g(x) = x^2$. Tentukan hasil dari operasi fungsi berikut:

a. $(f + g)(2)$

Jawab

$$(f + g)(2) = f(2) + g(2) = (2 + 3) + (2^2) = 5 + 4 = 9$$

b. $(f \cdot g)(0)$

c. $\left(\frac{g}{f}\right)(3)$

2. Diberikan fungsi $f(x) = x^2 + x$ dan $g(x) = \frac{2}{x+3}$. Tentukan hasil dari operasi fungsi berikut:

a. $(f - g)(2)$

b. $\left(\frac{f}{g}\right)(1)$

c. $g^2(3)$

Menggambar Grafik Fungsi

Contoh

1. Gambarlah grafik fungsi kuadrat berikut ini:

a. $y = -x^2 - 2x + 3$

Jawab

Titik Potong di Sumbu y

- $x = 0$
- $y = f(0) = -(0)^2 - 2(0) + 3 = 0 + 0 + 3 = 3$
- $(0, 3)$

Titik Potong di Sumbu x

- $y = 0$
- $0 = -x^2 - 2x + 3$
 $0 = (-x + 1)(x + 3)$
 $x_1 = 1$ atau $x_2 = -3$
- $(1, 0)$ dan $(-3, 0)$

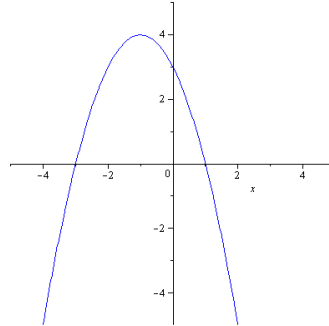
Kecekungan

- Karena koefisien dari variabel dengan pangkat tertinggi nilainya negatif, maka kurva cekung ke bawah

Titik puncak

- Bentuk umum: $ax^2 + bx + c = 0$
- $x_p = -\frac{b}{2a} = -\frac{-2}{2(-1)} = -1$
- $y_p = f(x_p) = f(-1) = -(-1)^2 - 2(-1) + 3 = -1 + 2 + 3 = 4$
- $(x_p, y_p) = (-1, 4)$

Grafik



- b. $y = -x^2 + 4$
- c. $y = x^2 + 6x$
- d. $y = x^2 - 4x + 4$
- e. $y = x^2 + 5x + 4$

Fungsi Ganjil dan Genap

Fungsi Ganjil

Definisi. Suatu fungsi disebut fungsi ganjil jika memenuhi sifat:

$$f(-x) = -f(x).$$

Contoh

1. Apakah fungsi-fungsi ini termasuk fungsi ganjil:

a. $f(x) = x$

Jawab

$$f(-x) = -x = -f(x)$$

Iya, $f(x) = x$ adalah fungsi ganjil.

b. $f(x) = \sin x$

Fungsi Genap

Definisi. Suatu fungsi disebut fungsi genap jika memenuhi sifat:

$$f(-x) = f(x).$$

Contoh

1. Apakah fungsi-fungsi ini termasuk fungsi genap:

a. $f(x) = x^2$

Jawab

$$f(-x) = (-x)^2 = x^2 = f(x)$$

Iya, $f(x) = x^2$ adalah fungsi genap.

b. $f(x) = \cos x$

Latihan Soal

1. Tentukan apakah fungsi $f(x) = \frac{x^2}{x^2+3}$ termasuk fungsi ganjil atau genap ? Jelaskan !

Mengkonversi Sudut ke Radian dan Radian Ke Sudut

Sudut ke Radian

Rumus:

$$x \text{ rad} = x^\circ \times \frac{\pi}{180^\circ} \text{ rad}$$

Contoh

1. Ubahlah sudut 30° ke dalam bentuk radian!

Jawab

$$x \text{ rad} = 30^\circ \times \frac{\pi}{180^\circ} \text{ rad} = \frac{1}{6} \pi \text{ rad}$$

2. Ubahlah sudut 150° ke dalam bentuk radian!
3. Ubahlah sudut 225° ke dalam bentuk radian !
4. Ubahlah sudut 240° ke dalam bentuk radian !

Radian ke Sudut

Rumus:

$$x^\circ = x \text{ rad} \times \frac{180^\circ}{\pi \text{ rad}}$$

Contoh

1. Ubahlah bentuk radian $\frac{3}{4} \pi \text{ rad}$ ke dalam bentuk sudut!

Jawab

$$x^\circ = \frac{3}{4} \pi \text{ rad} \times \frac{180^\circ}{\pi \text{ rad}} = 135^\circ.$$

2. Ubahlah bentuk radian $\frac{1}{3} \pi \text{ rad}$ ke dalam bentuk sudut!
3. Ubahlah bentuk radian $\frac{4}{5} \pi \text{ rad}$ ke dalam bentuk sudut !

Limit

Definisi. Suatu $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = L$ menyatakan bahwa untuk setiap $\varepsilon > 0$, terdapat $\delta > 0$ sedemikian sehingga $|f(x) - L| < \varepsilon$ dimana $0 < |x - c| < \delta$; atau dapat ditulis

$$\lim_{x \rightarrow c} f(x) = L \Leftrightarrow 0 < |x - c| < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon.$$

Limit Substitusi Langsung

Contoh

1. Carilah $\lim_{x \rightarrow 3} 2x^4$!

Jawab

$$\lim_{x \rightarrow 3} 2x^4 = 2(3)^4 = 2(81) = 162.$$

2. Tentukan $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{7x^5 - 10x^4 - 13x + 6}{3x^2 - 6x - 8}$!

Jika setelah dilakukan proses substitusi langsung ternyata nilainya menjadi bentuk tak tentu:

$\frac{0}{0}, \frac{\infty}{\infty}, \infty - \infty$, dll. maka cara mengerjakan harus menggunakan limit.

Limit Cara Pemfaktoran

Contoh

1. Tentukan $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4}{x - 2}$!

Jawab

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x - 2)(x + 2)}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x - 2)(x + 2)}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2} (x + 2) = 2 + 2 = 4.$$

2. Carilah $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1}{\sqrt{x}-1}$!

Limit Cara Dikalikan dengan Sekawan**Contoh**

1. Carilah $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x}-1}{x-1}$!

Jawab

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x} - 1}{x - 1} &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x} - 1}{x - 1} \times \frac{\sqrt{x} + 1}{\sqrt{x} + 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x - 1}{(x - 1)(\sqrt{x} + 1)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x - 1}{(x - 1)(\sqrt{x} + 1)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{(\sqrt{x} + 1)} = \frac{1}{(\sqrt{1} + 1)} = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

2. Tentukan $\lim_{x \rightarrow 7} \frac{2 - \sqrt{x-3}}{x^2 - 49}$!

Limit Trigonometri

Rumus-rumus Limit Trigonometri:

1. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sin x} = 1$

2. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\tan x} = 1$

3. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{\tan x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x}{\sin x} = 1$

4. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin ax}{bx} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{ax}{\sin bx} = \frac{a}{b}$

5. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan ax}{bx} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{ax}{\tan bx} = \frac{a}{b}$

6. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin ax}{\tan bx} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan ax}{\sin bx} = \frac{a}{b}$

Contoh

1. Tentukan limit dari $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{x}$!

Jawab

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} 3 \frac{\sin 3x}{3x} = 3 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{3x} = 3 \cdot 1 = 3.$$

2. Carilah limit dari $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x}{2x}$!

Rumus-rumus Trigonometri Sudut Rangkap:

1. $\sin 2x = 2 \sin x \cos x$

2. $\begin{aligned} \cos 2x &= \cos^2 x - \sin^2 x \\ &= 2 \cos^2 x - 1 \\ &= 1 - 2 \sin^2 x \end{aligned}$

3. $\tan 2x = \frac{2 \tan x}{1 - \tan^2 x}$

Contoh

1. Carilah limit dari $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos 4x - 1}{x \tan 2x}$!

Jawab

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos 4x - 1}{x \tan 2x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - 2 \sin^2 2x - 1}{x \tan 2x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-2 \sin^2 2x}{x \tan 2x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-2 \sin 2x}{x} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{\tan 2x} \\ &= -2 \left(\frac{2}{1}\right) (1) = -4. \end{aligned}$$

2. Tentukan limit dari $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2}$!

Limit di Tak Hingga

Contoh

1. Tentukan $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2}{5 - x^3}$!

Jawab

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2}{5 - x^3} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2}{5 - x^3} \times \frac{\frac{1}{x^3}}{\frac{1}{x^3}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{x}}{\frac{5}{x^3} - 1} = \frac{\frac{1}{\infty}}{\frac{5}{(\infty)^3} - 1} = \frac{0}{0 - 1} = \frac{0}{-1} = 0.$$

2. Carilah $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2}{x+1}$!

Rumus Limit di Tak Hingga bentuk tak tentu $\infty - \infty$ untuk:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\sqrt{ax^2 + bx + c} - \sqrt{px^2 + qx + r} \right)$$

1. Jika $a < p$ maka $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\sqrt{ax^2 + bx + c} - \sqrt{px^2 + qx + r} \right) = -\infty$
2. Jika $a > p$ maka $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\sqrt{ax^2 + bx + c} - \sqrt{px^2 + qx + r} \right) = \infty$
3. Jika $a = p$ maka $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\sqrt{ax^2 + bx + c} - \sqrt{px^2 + qx + r} \right) = \frac{b-q}{2\sqrt{a}}$

Contoh

1. Carilah $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\sqrt{6x^2 + x - 2} - \sqrt{6x^2 - 5x - 25} \right)$!

Jawab

Karena $a = 6 = p$, maka

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt{6x^2 + x - 2} - \sqrt{6x^2 - 5x - 25} &= \frac{b - q}{2\sqrt{a}} = \frac{1 - (-5)}{2\sqrt{6}} = \frac{1 + 5}{2\sqrt{6}} = \frac{6}{2\sqrt{6}} = \frac{3}{\sqrt{6}} = \frac{3}{\sqrt{6}} \times \frac{\sqrt{6}}{\sqrt{6}} \\ &= \frac{3\sqrt{6}}{6} = \frac{1}{2}\sqrt{6}. \end{aligned}$$

2. Tentukan $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\sqrt{25x^2 - 9x - 6} - 5x + 3 \right)$!

Tugas

1. Tentukan apakah fungsi berikut adalah fungsi ganjil atau genap
 - a. $f(x) = 3x$
 - b. $h(x) = x^2$
2. Ubahlah sudut 360° ke dalam bentuk radian!
3. Ubahlah bentuk radian $\frac{3}{2}\pi \text{ rad}$ ke dalam bentuk sudut!
4. Tentukan nilai limit dari:
 - a. $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{9+x^2}}{x-3}$

- b. $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2-9}{x-3}$
- c. $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-2)^2}{x^2-4}$
- d. $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2-x-6}{x-3}$
- e. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2+2x-3}{x-1}$
- f. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2}{2x^2+7}$
- g. $\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{4x^2 + 5x - 8} - (2x + 4))$
- a. $\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x^2+2x-8}{x^2-4}$
- b. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{x+1}}{x+4}$
- c. $\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{2x^2 + 3} - \sqrt{2x^2 - 5})$

Kekontinuan dari Fungsi

Definisi. Kontinuitas di satu titik

Misalkan f terdefinisi pada suatu interval terbuka yang mengandung c . Dikatakan bahwa f kontinu di c jika

$$\lim_{x \rightarrow c} f(x) = f(c)$$

Definisi kontinu di titik c juga dapat diperoleh dengan tiga syarat, yaitu:

- a. $\lim_{x \rightarrow c} f(x)$ ada
- b. $f(c)$ ada (c berada dalam daerah asal f)
- c. $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = f(c)$

Jika salah satu dari ketiga ini tak terpenuhi, maka f diskontinu di c .

Contoh

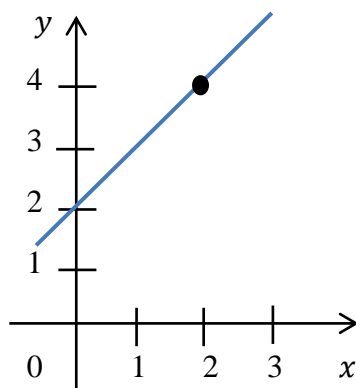
Misalkan $f(x) = \frac{x^2-4}{x-2}$, $x \neq 2$. Bagaimana seharusnya f didefinisikan di $x = 2$ agar kontinu di titik itu?

Solusi:

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x - 2)(x + 2)}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2} x + 2 = 4$$

Karena itu, kita definisikan $f(2) = 4$. Grafik dari fungsi yang dihasilkan diperlihatkan dalam gambar 1 di bawah. Kenyataannya, dapat dilihat bahwa $f(x) = x + 2$ untuk semua x .

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2-4}{x-2}, & x \neq 2 \\ 4, & x = 2 \end{cases}$$



Gambar 1

Latihan Soal

1. Apakah fungsi berikut kontinu atau tidak di titik 2? Jelaskan!

a. $f(t) = \frac{4t-8}{t-2}$

b. $g(t) = \begin{cases} \frac{t^3-8}{t-2}, & \text{jika } t \neq 2 \\ 12, & \text{jika } t = 2 \end{cases}$

2. Apakah fungsi berikut kontinu atau tidak di titik 3? Jelaskan!

a. $f(t) = \frac{|t-3|}{t-3}$

b. $h(t) = \begin{cases} t^2 - 9, & \text{jika } t \leq 3 \\ (3-t)^2, & \text{jika } t > 3 \end{cases}$

3. Tunjukkan apakah fungsi

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 16}{x - 4}, & \text{jika } x \neq 4 \\ 8, & \text{jika } x = 4 \end{cases}$$

kontinu di titik $x = 4$!

4. Tunjukkan apakah fungsi

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 9}{x - 3}, & \text{jika } x \neq 3 \\ 9, & \text{jika } x = 3 \end{cases}$$

kontinu di titik $x = 3$!

Turunan

Definisi.

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

Teknik Turunan

Misalkan $f(x) = x^n$, maka $f'(x) = n \cdot x^{n-1}$

Contoh

1. Tentukan turunan-turunan berikut menggunakan definisi:

a. $f(x) = x^2$

b. $f(x) = 3x$

c. $f(x) = 5x$

d. $f(x) = \sin x$

e. $f(x) = x^2 - 3x$

f. $f(x) = x^2 + 2x$

2. Carilah turunan-turunan berikut menggunakan teknik turunan:

a. $f(x) = 4x^5$

b. $f(x) = \frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}}$

Turunan Trigonometri

Definisi.

$$f(x) = \sin x \Leftrightarrow f'(x) = \cos x$$

$$f(x) = \cos x \Leftrightarrow f'(x) = -\sin x$$

Contoh

1. Tentukan turunan fungsi-fungsi trigonometri berikut:

- $f(x) = \sin x^2$
- $f(x) = \cos(-3x^2)$
- $f(x) = \sin(2x + 1)$
- $f(x) = \cos(2x^2 + 3x - 5)$
- $f(x) = \cos(2x^2 + 1)$

Aturan Rantai Turunan

Definisi.

$$\text{Misalkan } f(x) = (g(x))^n, \text{ maka } f'(x) = n \cdot g'(x) \cdot (g(x))^{n-1}$$

Contoh

1. Carilah turunan fungsi-fungsi berikut ini:

- $f(x) = (2x + 1)^2$
- $f(x) = (3x^2 - 1)^2$
- $f(x) = (x^2 - 3x + 1)^3$
- $f(x) = \sin(2x + 2)^3$
- $g(x) = (\sin(-3x))^4$
- $g(x) = (-3x + 2)^4$

Teknik Turunan Perkalian dan Pembagian Fungsi

Definisi.

Diberikan $f(x)$, $g(x)$, dan $h(x)$ adalah fungsi. Misalkan $g(x) = u$ dan $h(x) = v$, sehingga

$$f(x) = u \cdot v \Leftrightarrow f'(x) = u' \cdot v + u \cdot v'$$

$$f(x) = \frac{u}{v} \Leftrightarrow f'(x) = \frac{u'v - uv'}{v^2}$$

Contoh

1. Tentukan turunan dari fungsi-fungsi berikut ini:

- $f(x) = (2x + 1)(3x - 1)$
- $f(x) = (x^2 + 2x + 3)(x^3 - x)$
- $h(x) = (x^2 + 3)(2x + 1)$
- $f(x) = \frac{(2x+1)}{(x-3)}$
- $f(x) = \frac{(2x-3)^2}{(x^2+2)}$
- $h(x) = \frac{-x^2+5}{\cos 2x}$

Aplikasi Turunan

Nilai maksimum dan minimum

Nilai ekstrem adalah nilai maksimum atau nilai minimum. Nilai ekstrem merupakan salah satu dari tiga titik kritis:

- Titik ujung

2. Titik stasioner ($f'(c) = 0$)
3. Titik singular ($f'(c)$ tidak ada)

Contoh

$$f'(x) = \frac{2}{x+1}$$

$x = -1$ adalah titik singular

Contoh

1. Carilah nilai maksimum dan minimum dari fungsi-fungsi:

a. $f(x) = x^2 + 3x$ pada interval $[-2,1]$

Jawab

- Untuk $x = -2$

$$f(-2) = (-2)^2 + 3(-2) = 4 - 6 = -2$$

Untuk $x = 1$

$$f(1) = (1)^2 + 3(1) = 1 + 3 = 4$$

- $f'(x) = 0$

$$2x + 3 = 0$$

$$2x = -3$$

$$x = -\frac{3}{2}$$

$$\text{Maka } f\left(-\frac{3}{2}\right) = \left(-\frac{3}{2}\right)^2 + 3\left(-\frac{3}{2}\right) = \frac{9}{4} - \frac{9}{2} = \frac{9}{4} - \frac{18}{4} = -\frac{9}{4} = -2\frac{1}{4}$$

- $f'(x) = 2x + 3$, tidak ada titik singular

\therefore Jadi nilai maksimumnya adalah 4 dan nilai minimumnya adalah $-2\frac{1}{4}$.

b. $f(x) = x^4 - 2x^2 + 2$ pada interval $[-2,2]$

c. $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$ pada interval $[-3,1]$

d. $f(x) = x^{\frac{2}{3}}$ pada interval $[-1,2]$

e. $g(x) = x^2 + 4x + 4$ pada interval $[-4,0]$

f. $h(x) = x^2 + x$ pada interval $[-2,2]$

g. $f(x) = \sqrt[3]{x}$ pada interval $[-1,27]$

h. $f(x) = x^3 - 3x^2$ pada interval $[-1,2]$

i. $f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x$ pada interval $[-1,1]$

j. $f(x) = x^3 - 3x^2$ pada interval $[-2,2]$

Kemonotonan

Rumus:

$f'(x) > 0$ monoton naik

$f'(x) < 0$ monoton turun

Contoh

1. Tentukan dimana fungsi $f(x) = x^3 - 5x^2 + 2$ naik dan turun !

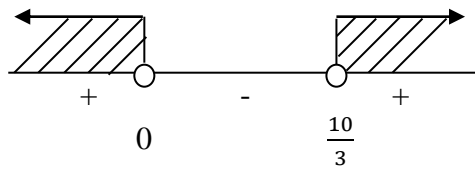
Jawab

$$f'(x) > 0$$

$$3x^2 - 10x > 0$$

$$x(3x - 10) > 0$$

$$x_1 = 0 \text{ atau } x_2 = \frac{10}{3}$$



Jadi grafik monoton naik pada interval $x < 0$ atau $x > \frac{10}{3}$. Untuk grafik monoton turun dapat dilihat dari garis bilangan yaitu $0 < x < \frac{10}{3}$.

2. Tentukan dimana fungsi $f(x) = 2x^3 - 9x^2 + 12x$ naik dan turun !
3. Tentukan dimana fungsi $f(x) = x^3 - 1$ naik dan turun !
4. Tentukan dimana fungsi $f(x) = x^3 + 3x^2 - 12$ naik dan turun !
5. Tentukan dimana fungsi $f(x) = 7x^3 + 3x^2 + 1$ naik dan turun !
6. Tentukan dimana fungsi $g(x) = 2x^3 - 3x - 10$ naik dan turun !
7. Tentukan dimana fungsi $f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x + 10$ naik dan turun !

Kecekungan

Rumus:

$f''(x) > 0$ cekung ke atas

$f''(x) < 0$ cekung ke bawah

Contoh

1. Tentukan dimana fungsi $f(x) = 3x^3 - 18x$ cekung ke atas dan cekung ke bawah!

Jawab

- $f'(x) = 9x^2 - 18$
- $f''(x) > 0$
 $18x > 0$
 $x > 0$

(1)

∴ Jadi grafik cekung ke atas (terbuka ke atas) pada interval $x > 0$. Untuk grafik cekung ke bawah (terbuka ke bawah) dapat dilihat (1) pada interval $x < 0$.

2. Tentukan dimana fungsi $f(x) = x^4 - 6x^3 - 24x^2 + 3x + 1$ cekung ke atas dan cekung ke bawah!
3. Tentukan dimana fungsi $f(x) = x^4 + 8x^3 - 2$ cekung ke atas dan cekung ke bawah!
4. Tentukan dimana fungsi $f(x) = x^3 - 12x + 1$ cekung ke atas dan cekung ke bawah!
5. Tentukan dimana fungsi $f(x) = x^4 - 2x^2 + 2$ cekung ke atas dan cekung ke bawah !

Menggambar grafik cangguh

Contoh

1. Sketsalah grafik fungsi $f(x) = x^3 - 3x + 5$!

Jawab

Titik Potong di Sumbu y

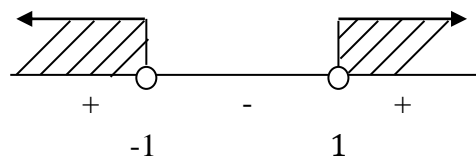
- $x = 0$
- $y = f(0) = (0)^3 - 3(0) + 5 = 0 - 0 + 5 = 5$
- $(0, 5)$

Titik Stasioner

- $f'(x) = 0$
 $3x^2 - 3 = 0$
 $3(x^2 - 1) = 0$
 $(x^2 - 1) = 0$
 $(x + 1)(x - 1) = 0$
 $x = -1$ atau $x = 1$
- Untuk $x = -1$
 $f(-1) = (-1)^3 - 3(-1) + 5 = -1 + 3 + 5 = 7$
 $(-1, 7)$
- Untuk $x = 1$
 $f(1) = (1)^3 - 3(1) + 5 = 1 - 3 + 5 = 3$
 $(1, 3)$

Kemonotonan

- $f'(x) > 0$
 $3x^2 - 3 > 0$
 $3(x^2 - 1) > 0$
 $(x^2 - 1) > 0$
 $(x + 1)(x - 1) > 0$
 $x_1 = -1$ atau $x_2 = 1$



Jadi grafik monoton naik pada interval $x < -1$ atau $x > 1$.

- Untuk grafik monoton turun dapat dilihat dari garis bilangan yaitu $-1 < x < 1$.

Kecekungan

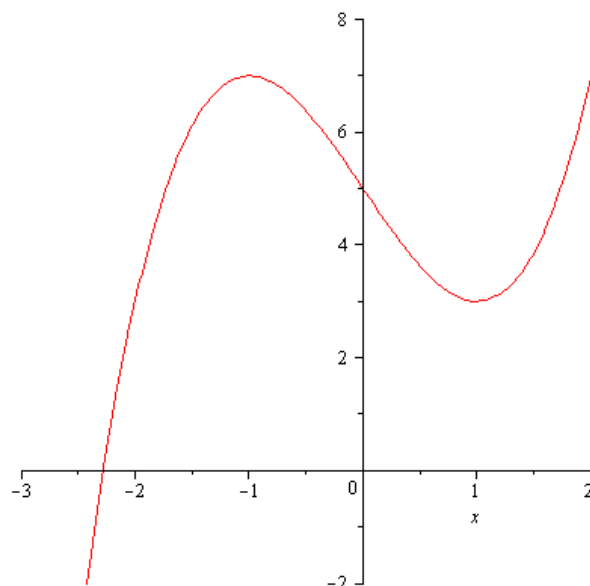
- $f'(x) = 3x^2 - 3$
- $f''(x) > 0$
 $6x > 0$
 $x > 0$

(2)

Jadi grafik cekung ke atas (terbuka ke atas) pada interval $x > 0$.

- Untuk grafik cekung ke bawah (terbuka ke bawah) dapat dilihat (2) pada interval $x < 0$.

Grafik



2. Sketsalah grafik fungsi $f(x) = 2x^3 - 3x^2$!
3. Sketsalah grafik fungsi $f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 12x + 3$!
4. Sketsalah grafik fungsi $f(x) = 2x^3 - 3x - 10$!
5. Sketsalah grafik fungsi $f(x) = 4x^3 - 3x^2 - 6x + 12$!
6. Sketsalah grafik fungsi $h(x) = x^3 - 3x^2 + 3x + 10$!
7. Sketsalah grafik fungsi $f(x) = x^3 - 3x + 5$!
8. Sketsalah grafik fungsi $f(x) = x^3 + 3x^2$!

FUNGSI TRANSENDEN

A. Fungsi Logaritma Asli

Turunan Fungsi Logaritma Asli

Definisi. Jika $u = f(x) > 0$ dan jika f terdifferensialkan, maka

$$\frac{d(\ln u)}{dx} = \frac{1}{u} \cdot \frac{du}{dx}$$

Contoh

1. Carilah turunan dari $y = \ln \sqrt{x}$!

Jawab

Misalkan $u = \sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}$. Maka

$$\frac{d(\ln \sqrt{x})}{dx} = \frac{1}{x^{\frac{1}{2}}} \cdot \frac{d(x^{\frac{1}{2}})}{dx} = \frac{1}{x^{\frac{1}{2}}} \cdot \frac{1}{2} \cdot x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2x}$$

Latihan Soal

1. Tentukan turunan dari:
 - a. $y = \ln(x^2 + 3x + \pi)$
 - b. $y = \ln(x - 4)^3$
 - c. $y = \ln(x^5 + 2)$

d. $y = \ln(2x + 1)^2$

e. $f(x) = \ln(x^2 + 25)^2$

B. Fungsi Eksponensial Asli

Definisi. Invers \ln disebut fungsi eksponensial asli dan dinyatakan oleh e . Jadi

$$x = e^y \Leftrightarrow y = \ln x.$$

Huruf e menyatakan bilangan real positif unik sedemikian sehingga $\ln e = 1$. Bilangan e adalah bilangan Euler dimana nilainya $e \approx 2,718 \dots$.

Turunan Fungsi Eksponensial Asli

Definisi. Jika $u = f(x)$ terdifferensialkan, maka

$$\frac{d(e^u)}{dx} = \frac{du}{dx} \cdot e^u.$$

Contoh

1. Carilah turunan dari $y = e^{\sqrt{x}}$!

Jawab

Misalkan $u = \sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}$. Maka

$$\frac{d(e^{\sqrt{x}})}{dx} = \frac{d(\sqrt{x})}{dx} \cdot e^{\sqrt{x}} = \frac{1}{2} \cdot x^{-\frac{1}{2}} \cdot e^{\sqrt{x}} = \frac{e^{\sqrt{x}}}{2\sqrt{x}}.$$

Latihan Soal

1. Carilah turunan dari:

a. $y = e^{x+2}$

b. $y = e^{\sqrt{x+2}}$

c. $g(x) = e^{-4x^2}$

C. Fungsi Logaritma dan Eksponensial Umum

Definisi. Untuk $a > 0$ dan bilangan real sebarang x ,

$$a^x = e^{x \ln a}.$$

Aturan Fungsi Eksponensial Umum

Definisi.

$$\frac{d(a^x)}{dx} = (\ln a) \cdot a^x$$

Contoh

1. Carilah turunan dari $\frac{d(3^{\sqrt{x}})}{dx}$!

Jawab

$$\frac{d(3^{\sqrt{x}})}{dx} = (\ln 3) \cdot \frac{d(\sqrt{x})}{dx} \cdot 3^{\sqrt{x}} = \frac{(\ln 3) \cdot 3^{\sqrt{x}}}{2\sqrt{x}}$$

Aturan Fungsi Logaritma Umum

Definisi.

$$\frac{d({}^a \log x)}{dx} = \frac{1}{(\ln a) \cdot x}$$

Contoh

1. Tentukan turunan dari $y = \log(x^4 + 13)$!

Jawab

$$\frac{d(\log(x^4 + 13))}{dx} = \frac{1}{(\ln 10)} \cdot \frac{4x^3}{(x^4 + 13)} = \frac{4x^3}{(\ln 10) \cdot (x^4 + 13)}$$

Latihan Soal

1. Tentukan turunan $y = {}^2 \log(x^2 + 1)$!

D. Fungsi Invers

Contoh

1. Carilah $f^{-1}(x)$ jika $f(x) = \frac{x}{1-x}$!

Jawab

$$y = \frac{x}{1-x}$$

$$y(1-x) = x$$

$$y - xy = x$$

$$y = x + xy$$

$$x + xy = y$$

$$x(1+y) = y$$

$$x = \frac{y}{1+y}$$

$$f^{-1}(x) = \frac{x}{1+x}$$

Latihan Soal

1. Carilah invers dari fungsi-fungsi berikut:

- a. $f(x) = x + 1$

- b. $f(x) = \sqrt{x+1}$

- c. $f(x) = -\frac{1}{x-3}$

- d. $f(x) = \frac{x+1}{x-1}$

e. $f(x) = \frac{1}{x^3}$

E. Fungsi Invers Trigonometri

Definisi. Untuk memperoleh invers dari Sinus, Cosinus, dan Tangen, kita batasi daerah asalnya masing-masing yaitu:

$$x = \sin^{-1} y \Leftrightarrow y = \sin x, -\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}$$

$$x = \cos^{-1} y \Leftrightarrow y = \cos x, 0 \leq x \leq \pi$$

$$x = \tan^{-1} y \Leftrightarrow y = \tan x, -\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}.$$

Lambang arc sin, arc cos, dan arc tan sering digunakan untuk \sin^{-1} , \cos^{-1} , dan \tan^{-1} .

Contoh

1. Hitunglah:

a. $\sin^{-1}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

b. $\cos^{-1}\left(-\frac{1}{2}\right)$

c. $\tan^{-1}(1)$

Jawab

1. a. $\sin^{-1}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{\pi}{4}$

b. $\cos^{-1}\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{2\pi}{3}$

c. $\tan^{-1}(1) = \frac{\pi}{4}$

Latihan Soal

1. Carilah nilai-nilai berikut:

a. $\sin^{-1}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

b. $\cos^{-1}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

c. $\tan^{-1}\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$

2. Carilah semua nilai dari invers trigonometri berikut (nilai sudut $0 \leq \theta \leq 2\pi$):

a. $\sin^{-1}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

b. $\cos^{-1}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

F. Fungsi Hiperbolik

Definisi. Fungsi Sinus Hiperbolik, Cosinus Hiperbolik dan Tangen Hiperbolik didefinisikan oleh

$$\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

$$\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

$$\tanh x = \frac{\sinh x}{\cosh x}$$

Sifat Identitas Fungsi Hiperbolik:

$$\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1.$$

Bukti

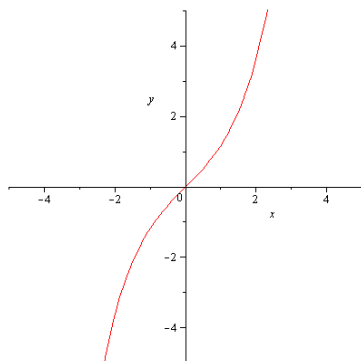
$$\begin{aligned}\cosh^2 x - \sinh^2 x &= \left(\frac{e^x + e^{-x}}{2}\right)^2 - \left(\frac{e^x - e^{-x}}{2}\right)^2 = \frac{e^{2x} + e^{-2x} + 2}{4} - \frac{e^{2x} + e^{-2x} - 2}{4} \\ &= \frac{e^{2x} - e^{2x} + e^{-2x} - e^{-2x} + 2 + 2}{4} = \frac{4}{4} = 1.\end{aligned}$$

Turunan Fungsi Hiperbolik

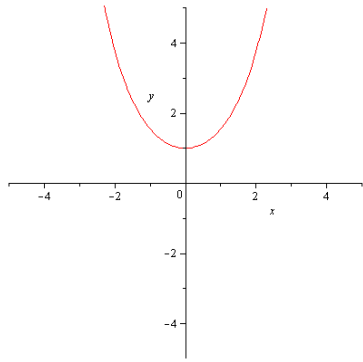
- $y = \sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$
 $y' = \frac{e^x + e^{-x}}{2} = \cosh x$
- $y = \cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$
 $y' = \frac{e^x - e^{-x}}{2} = \sinh x$

Grafik Fungsi Hiperbolik

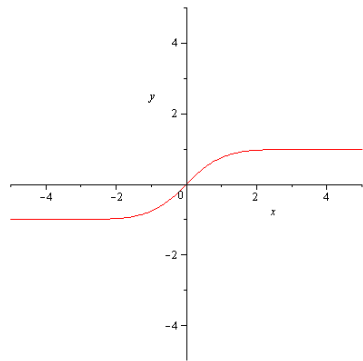
- $y = \sinh x$



- $y = \cosh x$



- $y = \tanh x$



Teorema. Turunan Fungsi Hiperbolik

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx}(\sinh x) &= \cosh x & \frac{d}{dx}(\operatorname{csch} x) &= -\operatorname{csch} x \coth x \\ \frac{d}{dx}(\cosh x) &= \sinh x & \frac{d}{dx}(\operatorname{sech} x) &= -\operatorname{sech} x \tanh x \\ \frac{d}{dx}(\tanh x) &= \operatorname{sech}^2 x & \frac{d}{dx}(\operatorname{coth} x) &= -\operatorname{csch}^2 x \end{aligned}$$

Contoh

1. Carilah turunan dari fungsi hiperbolik berikut:

- $y = \cosh(3x - 1)$
- $y = \tanh(\sin x)$

Jawab

- $$y = \cosh(3x - 1)$$

$$y' = 3 \sinh(3x - 1)$$
- $$y = \tanh(\sin x)$$

$$y' = \cos x \cdot \operatorname{sech}^2(\sin x)$$

Latihan Soal

- Carilah turunan dari fungsi hiperbolik berikut:
 - $y = \cosh^2 x$
 - $y = \sinh(x + 3)^2$
 - $y = \tanh(x^2 + 4)$

d. $y = \sinh 2x$

e. $y = \cosh(x^2 - 5)$

Latihan Soal

1. Tentukan turunan dari:

a. $y = \frac{2}{5}x^3 + \frac{5}{3}x^2 - 2x$

b. $y = \sin(2x^2 - 2)$

c. $y = \cos(x^2 - 10x)$

d. $y = \tan(3x^2 + 1)$

e. $y = \frac{(2x-1)^2}{3x+1}$

f. $y = (x^2 + 5x) \sin x$

g. $y = \sin^5 x$

h. $y = e^{(2x-1)^2}$

i. $y = e^{\sin x}$

j. $y = 3^{x^3+2x}$

k. $y = \ln(\cos x)$

l. $y = {}^3 \log(x^2 + 4x)$

m. $y = \cosh(x^2 - 2)$

n. $y = \tanh(3x + 5)$

o. $y = \sinh\left(\frac{x^2+3}{(3x-2)^3}\right)$

p. $y = \cosh((2x - 1) \sin x)$

q. $y = e^{4x+1}$

r. $y = \ln(x^2 - 5x)$

s. $y = 10^{x^2-2}$

t. $y = {}^2 \log(4x - 1)$

u. $y = \sinh(2x + 5)$

v. $y = e^{(3x-1)^3}$

w. $y = \ln[(x + 2) \sin x]$

x. $y = 4^{\cos x}$

y. $y = {}^5 \log(x^2 + 2)^2$

z. $y = \cosh[\sin(2x)]$

aa. $y = \tanh\left[\frac{\sin x}{2x}\right]$

bb. $f(x) = (x^2 + 2x + 3)^4$

cc. $g(x) = \sinh[\sin x]$

dd. $h(x) = e^{10x^2}$

ee. $y = {}^4 \log(2x - 10)$

ff. $y = \tanh(x^2 + 2x - 1)$

gg. $f(x) = \sin(2x^3)$

hh. $g(x) = (3x - 2) \cos x$

ii. $h(x) = e^{(x+2)^2}$

jj. $y = {}^5 \log[\sin x]$

kk. $y = \sinh 2x$

ll. $f(x) = (2x - 5)^2$

mm. $g(x) = \frac{\cos x}{(x+2)}$

nn. $h(x) = \ln[\cos x]$

oo. $y = 6^{(2x-1)^3}$

pp. $y = \cosh(2x^2 - 5x)$

2. Carilah invers dari fungsi-fungsi berikut:

a. $f(x) = x + 1$

b. $f(x) = -\frac{1}{x-3}$

c. $f(x) = \frac{x+1}{x-1}$

d. $f(x) = \frac{2x+3}{5x-1}, x \neq \frac{1}{5}$

3. Carilah nilai-nilai berikut:

a. $\sin^{-1}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

b. $\cos^{-1}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

c. $\tan^{-1}\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$

d. $\sin^{-1}\left(-\frac{1}{2}\right)$

e. $\cos^{-1}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

4. Carilah semua nilai dari invers trigonometri berikut (nilai sudut $0 \leq \theta \leq 2\pi$):

a. $\sin^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)$

b. $\tan^{-1}(-1)$

c. $\sin^{-1}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

d. $\cos^{-1}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

e. $\sin^{-1}(1)$

f. $\tan^{-1}(-\sqrt{3})$

Rumus-rumus:

Turunan Fungsi Eksponensial Asli

$$f(x) = e^{g(x)} \Leftrightarrow f'(x) = g'(x) \cdot e^{g(x)}$$

Turunan Fungsi Logaritma Asli

$$f(x) = \ln[g(x)] \Leftrightarrow f'(x) = \frac{g'(x)}{g(x)}$$

Turunan Fungsi Eksponensial Umum

$$f(x) = a^{g(x)} \Leftrightarrow f'(x) = (\ln a) \cdot g'(x) \cdot a^{g(x)}$$

Turunan Fungsi Logaritma Umum

$$f(x) = {}^a \log[g(x)] \Leftrightarrow f'(x) = \frac{g'(x)}{(\ln a) \cdot g(x)}$$

