BAB I
HIMPUNAN DAN LOGIKA

A. Himpunan

Berikut beberapa istilah di dalam matematika.

- Aksioma : Proposisi yang diasumsikan benar. Aksioma tidak memerlukan pembuktian kebenaran lagi.
- Teorema : Proposisi yang sudah terbukti benar. Bentuk khusus dari teorema adalah lemma dan corolarry.
- Lemma : Teorema sederhana yang digunakan dalam pembuktian teorema lain.
- *Corolarry* (akibat) : Teorema yang dapat dibentuk langsung dari teorema yang telah dibuktikan. .
- Himpunan (*set*): Kumpulan objek-objek yang berbeda.

Simbol-simbol baku himpunan:

$\mathbb{N}$ = Himpunan bilangan asli = $\{1, 2, 3, \dots\}$

$\mathbb{Z}$ = Himpunan bilangan bulat = $\{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}$

$\mathbb{R}$ = Himpunan bilangan real

$\mathbb{Q}$ = Himpunan bilangan rasional = $\left\{\frac{a}{b} | a, b \in \mathbb{Z}, b \neq 0\right\}$

$\mathbb{C}$ = Himpunan bilangan kompleks = $\left\{a + ib | a, b \in \mathbb{R}, i = \sqrt{-1}\right\}$

Notasi pembentuk himpunan :

$$\{x |\ \text{syarat yang harus dipenuhi oleh } x\},$$

tanda '|' dibaca dimana atau sedemikian sehingga.

Contoh:

$$\mathbb{Q} = \left\{\frac{a}{b} | a, b \in \mathbb{Z}, b \neq 0\right\}$$

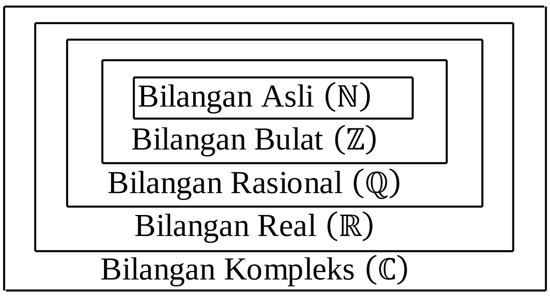
Kuantor Universal : $\forall x$ (untuk setiap atau untuk semua)

Kuantor Eksistensial : $\exists x$ (ada atau beberapa)

Negasi/ingkaran :

$\sim [\forall x, p(x)] = \exists x, \sim p(x)$

$\sim [\exists x, p(x)] = \forall x, \sim p(x)$

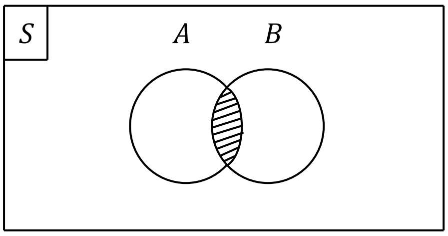


Gambar 1. Hubungan Himpunan-himpunan

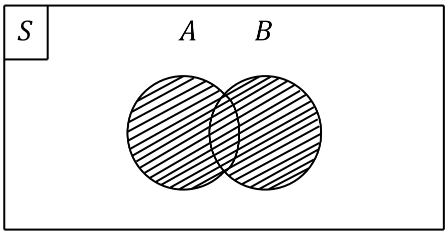
Definisi 1. Dua himpunan dikatakan sama jika mereka memuat elemen-elemen yang sama. Jika himpunan A dan B sama, maka dinotasikan dengan $A = B$.

Operasi pada Himpunan:

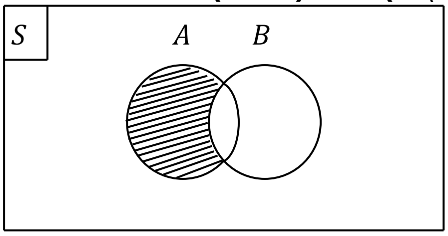
1. $\boldsymbol{A}$ **irisan** $\boldsymbol{B}$ **(**$\boldsymbol{A \cap B}$**)**



2. $\boldsymbol{A}$ **gabungan** $\boldsymbol{B}$ **(**$\boldsymbol{A \cup B}$**)**



3. $\boldsymbol{A}$ **minus** $\boldsymbol{B}$ **(**$\boldsymbol{A - B}$**) atau (**$\boldsymbol{A \setminus B}$**)**



S = Himpunan semesta

Komplemen:

$\bar{A} = \{x | x \in S \text{ dan } x \notin A\}$

Bisa A^c atau A'.

Perkalian Kartesian

$A \times B = \{(a, b) | a \in A \text{ dan } b \in B\}$

Dibaca "perkalian kartesian A dan B" atau "hasil kali kartesian A dan B".

Misalkan:

$\mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{R}$, simbol "→" dibaca "dipetakan ke".

Kardinalitas A : Jumlah elemen di dalam A $[n(A)]$

Himpunan kuasa : Himpunan yang anggotanya adalah semua himpunan bagian.

Contoh:

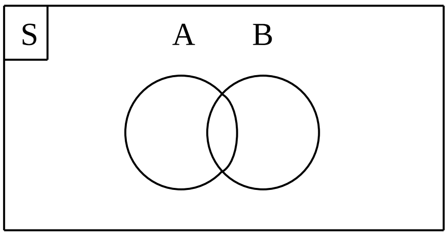
1. Himpunan $A = \{2,3\}$. Himpunan kuasa $A = \{\emptyset, \{2,3\}, \{2\}, \{3\}\}$. $n(A) = 2^2 = 4$.

Latihan soal

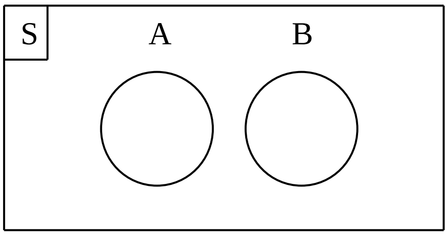
1. Tentukan himpunan kuasa dari himpunan $B = \{1,2,4\}$!

Jenis-jenis Himpunan:

Himpunan Tidak Saling Asing



Himpunan Saling Asing



Himpunan tidak saling asing:

$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$

Himpunan saling asing berlaku:

$n(A \cup B) = n(A) + n(B)$

Catatan rumus:

$n(A \cup B \cup C) = n(A) + n(B) + n(C) - n(A \cap B) - n(A \cap C) - n(B \cap C) + n(A \cap B \cap C)$

Latihan Soal

1. Tentukan himpunan kuasa dari himpunan-himpunan berikut ini:
   a. $A = \{1, 4, 5\}$
   b. $B = \{1, 2, 3, 4\}$

B. Logika Matematika

Proposisi : Kalimat deklaratif yang bernilai benar atau salah, tetapi tidak dapat sekaligus keduanya.

Konjungsi : $p \wedge q$

Disjungsi : $p \vee q$

Syarat cukup (p)

$p \Rightarrow q$

Syarat perlu (q)

Ekivalen : $(\equiv)$

Tautologi : Proposisi majemuk untuk semua kasus benar.

Kontradiksi : Proposisi majemuk untuk semua kasus salah.

Xor (Exclusive or) : $p \oplus q$

p	q	$p \oplus q$
1	1	0
1	0	1
0	1	1
0	0	0

Contoh

"Ani dapat memilih hadiah ulang tahun dari Ibunya berupa Hp atau Uang"

Tabel kebenaran $p \Rightarrow q$

p	q	$p \Rightarrow q$
1	1	1
1	0	0
0	1	1
0	0	1

Tabel kebenaran $p \wedge q$

p	q	$p \wedge q$
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	0

Tabel kebenaran $p \vee q$

p	q	$p \vee q$
1	1	1
1	0	1
0	1	1
0	0	0

Tabel kebenaran $p \Leftrightarrow q$

p	q	$p \Leftrightarrow q$
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	1

Contoh:

Tabel kebenaran $[p \wedge (p \Rightarrow q)] \Rightarrow q$ (Tautologi)

p	q	$p \Rightarrow q$	$p \wedge (p \Rightarrow q)$	$[p \wedge (p \Rightarrow q)] \Rightarrow q$
1	1	1	1	1
1	0	0	0	1
0	1	1	0	1
0	0	1	0	1

Tabel kebenaran implikasi, biimplikasi, konvers, invers, dan kontraposisi

						Konvers	Invers	Kontraposisi
p	q	$\sim p$	$\sim q$	$p \Rightarrow q$	$p \Leftrightarrow q$	$q \Rightarrow p$	$\sim p \Rightarrow \sim q$	$\sim q \Rightarrow \sim p$
1	1	0	0	1	1	1	1	1
1	0	0	1	0	0	1	1	0
0	1	1	0	1	0	0	0	1
0	0	1	1	1	1	1	1	1

$p \Rightarrow q$ (Jika ada tugas maka saya masuk kuliah)

- Konvers: $q \Rightarrow p$
  Jika saya masuk kuliah maka ada tugas.
- Invers: $\sim p \Rightarrow \sim q$
  Jika tidak ada tugas maka saya tidak masuk kuliah.
- Kontraposisi: $\sim q \Rightarrow \sim p$
  Jika saya tidak masuk kuliah maka tidak ada tugas.

Modus Ponens

$$\begin{array}{l} p \Rightarrow q \\ \underline{p \qquad\quad} \\ \therefore\ q \end{array}$$

Contoh:

1. Jika 6 habis dibagi 2 maka 6 adalah bilangan genap.
   6 habis dibagi 2.
   ∴ Jadi 6 adalah bilangan genap.
2. Jika sungai dipelihara dengan baik, maka sungai akan bersih dan indah.
   Sungai dipelihara dengan baik.
   ∴ ....

Modus Tolens

$$\begin{array}{l} p \Rightarrow q \\ \quad \sim q \\ \hline \therefore\ \sim p \end{array}$$

Contoh:

1. Jika n bilangan ganjil, maka n^2 bernilai ganjil.
   n^2 bernilai genap.
   ∴ n bilangan genap.
2. Jika Eka belajar, maka dia lulus ujian.
   Eka tidak lulus ujian.
   ∴ ....

Silogisme

$$\begin{array}{l} p \Rightarrow q \\ q \Rightarrow r \\ \hline \therefore p \Rightarrow r \end{array}$$

Contoh:

1. Jika saya belajar dengan giat, maka saya lulus ujian.
   Jika saya lulus ujian, maka saya cepat bekerja.
   ∴ jika saya belajar dengan giat, maka saya cepat bekerja.
2. Jika Budi rajin, maka Ia akan naik kelas.
   Jika Budi naik kelas, maka Ia mendapat hadiah.
   ∴ ....

BAB II
INDUKSI MATEMATIKA

A. Induksi Matematika

Contoh

1. Buktikan melalui induksi matematika
$$1(2)+2(3)+\cdots+n(n+1)=\frac{n(n+1)(n+2)}{3}$$
untuk $n \geq 1$!
2. Buktikan bahwa
$$1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2=\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$$
untuk setiap $n \in \mathbb{N}$!
3. Buktikan dengan induksi matematika bahwa n^3+2n adalah kelipatan 3 untuk semua $n \geq 1$!
4. Buktikan bahwa ketaksamaan
$$2^n > 2n+1$$
benar untuk semua bilangan asli $n \geq 3$!
5. Buktikan bahwa
$$1+2+3+\cdots+n=\frac{n(n+1)}{2}$$
untuk setiap $n \in \mathbb{N}$!
6. Buktikan bahwa
$$2+4+6+\cdots+2n=n(n+1)$$
untuk setiap $n \in \mathbb{N}$!
7. Buktikan melalui induksi matematika
$$1+2.2+3.2^2+\cdots+n.2^{n-1}=1+(n-1)2^n$$
untuk setiap $n \in \mathbb{N}$!
8. Buktikan dengan induksi matematika bahwa 7^n-1 habis dibagi 6 untuk setiap $n \in \mathbb{N}$!
9. Buktikan dengan induksi matematika bahwa $3^{2n}-1$ habis dibagi 8 untuk setiap $n \in \mathbb{N}$!
10. Buktikan dengan induksi matematika bahwa 12^n-1 habis dibagi 11 untuk setiap $n \in \mathbb{N}$!
11. Buktikan bahwa
$$4+10+16+\cdots+(6n-2)=n(3n+1)$$
untuk setiap $n \in \mathbb{N}$!
12. Buktikan dengan induksi matematika bahwa 5^{2n-1} habis dibagi 5 untuk semua $n \in \mathbb{N}$!

BAB III
MATRIKS DAN FUNGSI

A. Matriks

Definisi. Matriks adalah suatu susunan elemen-elemen (biasanya bilangan-bilangan) yang disusun berbentuk persegi panjang yang terdiri dari beberapa baris dan beberapa kolom dan diberi kurung biasa atau kurung siku.

Kurung biasa:

$$\begin{pmatrix} & \end{pmatrix}$$

Kurung siku:

$$\begin{bmatrix} & \end{bmatrix}$$

Matriks ukuran 3×2 berarti terdiri dari 3 baris dan 2 kolom. Biasanya matriks disimbolkan dengan huruf kapital. Dua matriks A dan B dikatakan sama ($A = B$), jika A dan B berukuran sama dan elemen-elemen yang bersesuaian adalah sama. Perkalian matriks $M_{a\times b}$ dan $N_{b\times c}$ menghasilkan $K_{a\times c}$.

Sifat-sifat Matriks:

Misalkan A, B dan C adalah matriks, maka:

1. $A + B = B + A$
2. $AB \neq BA$
3. $(A + B) + C = A + (B + C)$
4. $A(B + C) = AB + AC\backslash$
5. $(A + B)C = AC + BC$

Beberapa jenis matriks:

1. Matriks bujur sangkar: Suatu matriks dimana banyaknya baris sama dengan banyaknya kolom.
2. Matriks nol: Suatu matriks yang semua elemennya nol dan biasanya dinyatakan dengan O.
   Contoh:
   $$O = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$
3. Matriks diagonal: Suatu matriks bujur sangkar yang semua elemennya adalah nol kecuali elemen-elemen diagonal pokok.
   Contoh:
   $$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$
4. Matriks satuan: Suatu matriks diagonal dimana elemen-elemen diagonal pokokya adalah 1 dan biasanya dinyatakan dengan I.
   Contoh:
   $$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$
   Sifat: $AI = IA = A$
5. Matriks segitiga atas: Suatu matriks bujur sangkar dimana elemen-elemen $a_{i,j} = 0$ untuk $i > j$.

Contoh:

$$M = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

6. Matriks segitiga bawah: Suatu matriks bujur sangkar dimana elemen-elemen $a_{i,j} = 0$ untuk $i < j$.
   Contoh:

$$N = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 8 & 3 & 0 \\ 7 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

7. Matriks simetris: Suatu matriks bujur sangkar dimana elemen $a_{i,j} = a_{j,i}$ untuk semua nilai i dan j.
   Contoh:

$$B = \begin{pmatrix} 3 & 8 & 7 \\ 8 & 2 & 1 \\ 7 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

8. Matriks transpose: Matriks yang diperoleh dari suatu matriks dengan menukar baris menjadi kolom dan kolom menjadi baris. Matriks transpose dari suatu matriks A dinyatakan dengan A^T.
   Contoh:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

   Maka

$$A^T = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$$

<u>Determinan</u>

Determinan Derajat 2

$$|A| = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$$

Contoh

1. Tentukan nilai determinan dari matriks $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$!

Jawab

$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 1.4 - 2.3 = 4 - 6 = -2$.

Determinan Derajat 3

Metode Sarrus

$$\begin{array}{ccccc} + & + & + & - & - & - \end{array}$$

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \left|\begin{array}{ccc|cc} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{31} & a_{32} \end{array}\right| = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32}$$
$$-[a_{13}a_{22}a_{31} + a_{11}a_{23}a_{32} + a_{12}a_{21}a_{33}]$$

Metode Sarrus hanya boleh dipakai untuk menghitung determinan derajat 3.

Contoh

1. Hitunglah nilai determinan berikut dengan menggunakan Metode Sarrus:

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} \ !$$

Jawab

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} = 45 + 84 + 96 - (105 + 48 + 72) = 0 \ .$$

Metode Ekspansi Kofaktor

Dengan mencari minornya (yaitu menghapus satu baris dan satu kolom yang memuat elemen tersebut)

Jika $i + j$ = genap maka tandanya plus (+)

Jika $i + j$ = ganjil maka tandanya minus (-)

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

a. Ekspansi baris ke-1

$$|A| = a_{11}M_{11} - a_{12}M_{12} + a_{13}M_{13}$$
$$= a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

b. Ekspansi baris ke-2

$$|A| = -a_{21}M_{21} + a_{22}M_{22} - a_{23}M_{23}$$
$$= -a_{21}\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{22}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{23}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

c. Ekspansi baris ke-3

$$|A| = a_{31}M_{31} - a_{32}M_{32} + a_{33}M_{33}$$
$$= a_{31}\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix} - a_{32}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{vmatrix} + a_{33}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

d. Ekspansi kolom ke-1

$$|A| = a_{11}M_{11} - a_{21}M_{21} + a_{31}M_{31}$$
$$= a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{21}\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{31}\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix}$$

e. Ekspansi kolom ke-2

$$|A| = -a_{12}M_{12} + a_{22}M_{22} - a_{32}M_{32}$$
$$= -a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{22}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{32}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{vmatrix}$$

f. Ekspansi kolom ke-3

$$|A| = a_{13}M_{13} - a_{23}M_{23} + a_{33}M_{33}$$
$$= a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} - a_{23}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} + a_{33}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

Kita dapat memilih salah satu baris atau salah satu kolom sebagai pedoman, dan nantinya diperoleh hasil yang sama. Sehingga cara a) sampai f) akan menghasilkan nilai yang sama.

Contoh

1. Hitunglah nilai determinan berikut dengan menggunakan metode Ekspansi Kofaktor:

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} \ !$$

Jawab

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix}$$

Ekspansi baris ke-1

$$|A| = a_{11}M_{11} - a_{12}M_{12} + a_{13}M_{13}$$

$$= a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$
$$= 1\begin{vmatrix} 5 & 6 \\ 8 & 9 \end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix} 4 & 6 \\ 7 & 9 \end{vmatrix} + 3\begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 7 & 8 \end{vmatrix}$$
$$= 1(45-48) - 2(36-42) + 3(32-35)$$
$$= 1(-3) - 2(-6) + 3(-3)$$
$$= -3 + 12 - 9$$
$$= 0$$

Latihan Soal

1. Hitunglah nilai determinan berikut dengan menggunakan Metode Sarrus:
$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 1 & 6 \\ -1 & 3 & 2 \end{vmatrix}\ !$$
1. Hitunglah nilai determinan berikut dengan menggunakan Metode Ekspansi Kofaktor:
$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 5 & -5 \\ -2 & 3 & 6 \\ 1 & 3 & 4 \end{vmatrix}$$
2. Carilah nilai determinan berikut menggunakan Metode Sarrus dan Metode Ekspansi Kofaktor:

a. $|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 3 \\ 1 & 0 & 8 \end{vmatrix}$

b. $|B| = \begin{vmatrix} 3 & 7 & 3 \\ -2 & 8 & -2 \\ 1 & -12 & 1 \end{vmatrix}$

Invers Matriks

Definisi

Jika A adalah matriks maka

$$A^{-1} = \frac{1}{det.A} \times Adj.A = \frac{1}{|A|} \times Adj.A.$$

Invers Matrik Derajat 2

Contoh

1. Tentukan invers dari matriks $A = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$!

Jawab

$|A| = \begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 3.3 - 5.2 = 9 - 10 = -1$

$Adj.A = \begin{pmatrix} 3 & -5 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$

$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \times Adj.A = \frac{1}{-1} \times \begin{pmatrix} 3 & -5 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 5 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}$

Latihan Soal

1. Tentukan invers dari matriks-matriks:
   a. $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}$
   b. $B = \begin{pmatrix} 8 & 1 \\ 7 & 6 \end{pmatrix}$

Invers Matriks Derajat 3

Contoh

1. Tentukan invers dari matriks $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 5 \\ 1 & 5 & 12 \end{pmatrix}$!

Jawab

Deteriminan dari matriks A adalah

$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 5 \\ 1 & 5 & 12 \end{vmatrix}$

Ekspansi kolom ke-1

$$\begin{aligned}
|A| &= a_{11}M_{11} - a_{21}M_{21} + a_{31}M_{31} \\
&= a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{21}\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{31}\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix} \\
&= 1\begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 5 & 12 \end{vmatrix} - 1\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 12 \end{vmatrix} + 1\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} \\
&= 1(36 - 25) - 1(24 - 15) + 1(10 - 9) \\
&= 11 - 9 + 1 \\
&= 3
\end{aligned}$$

Kofaktor-kofaktor dari matriks A:

$K_{11} = \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 5 & 12 \end{vmatrix} = 3.12 - 5.5 = 36 - 25 = 11$

$K_{12} = -\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 1 & 12 \end{vmatrix} = -(1.12 - 5.1) = -(12 - 5) = -7$

$K_{13} = \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} = 1.5 - 3.1 = 5 - 3 = 2$

$K_{21} = -\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 12 \end{vmatrix} = -(2.12 - 3.5) = -(24 - 15) = -9$

$K_{22} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 12 \end{vmatrix} = 1.12 - 3.1 = 12 - 3 = 9$

$K_{23} = -\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} = -(1.5 - 2.1) = -(5 - 2) = -3$

$K_{31} = \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} = 2.5 - 3.3 = 10 - 9 = 1$

$K_{32} = -\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} = -(1.5 - 3.1) = -(5 - 3) = -2$

$K_{33} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 1.3 - 2.1 = 3 - 2 = 1$

Matriks Kofaktor dari matriks A:

$$K = \begin{pmatrix} 11 & -7 & 2 \\ -9 & 9 & -3 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

Sehingga untuk Adjoin matriks A adalah

$$Adj.A = K^T = \begin{pmatrix} 11 & -9 & 1 \\ -7 & 9 & -2 \\ 2 & -3 & 1 \end{pmatrix}$$

Jadi Invers dari matriks A adalah:

$\therefore\ A^{-1} = \frac{1}{|A|} \times Adj.A = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 11 & -9 & 1 \\ -7 & 9 & -2 \\ 2 & -3 & 1 \end{pmatrix}.$

Latihan Soal

1. Tentukan invers dari matriks-matriks:

   a. $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 3 \\ 1 & 0 & 8 \end{pmatrix}$

   b. $B = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 0 & 4 & 5 \\ -2 & 1 & 4 \end{pmatrix}$

   c. $B = \begin{pmatrix} 8 & -3 & -5 \\ 0 & 1 & 2 \\ 4 & -7 & 6 \end{pmatrix}$

<u>Nilai Eigen dan Vektor Eigen</u>

Definisi

Diberikan matriks $A_{n\times n}$ dan vektor $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$. Jika $A\bar{x} = \lambda\bar{x}$, maka λ disebut nilai eigen dari A dan $\bar{x}$ disebut vektor eigen terkait dengan λ.

Dari persamaan $A\bar{x} = \lambda\bar{x}$, diperoleh:

$$A\bar{x} = \lambda\bar{x}$$
$$A\bar{x} - \lambda\bar{x} = 0$$
$$(A - \lambda I)\bar{x} = 0$$

Agar λ menjadi nilai eigen, maka paling tidak ada satu solusi tak nol dari persamaan $(A-\lambda I)\bar{x}=0$. Persamaan $(A-\lambda I)\bar{x}=0$ mempunyai solusi tak nol jika dan hanya jika $\det(A-\lambda I)=0$ atau $\det(\lambda I-A)=0$. $\det(\lambda I-A)=0$ disebut persamaan karakteristik matriks A dan merupakan polinomial derajat n, sehingga mempunyai sebanyak n nilai λ.

Contoh

1. Tentukan nilai eigen dan vektor eigen dari matriks:

$$A=\begin{pmatrix}0 & 0 & -2\\ 1 & 2 & 1\\ 1 & 0 & 3\end{pmatrix}.$$

Jawab

Nilai eigen:

$|\lambda I-A|=0$

$$\left|\lambda\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}0 & 0 & -2\\ 1 & 2 & 1\\ 1 & 0 & 3\end{pmatrix}\right|=0$$

$$\left|\begin{pmatrix}\lambda & 0 & 0\\ 0 & \lambda & 0\\ 0 & 0 & \lambda\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}0 & 0 & -2\\ 1 & 2 & 1\\ 1 & 0 & 3\end{pmatrix}\right|=0$$

$$\left|\begin{pmatrix}\lambda & 0 & 2\\ -1 & \lambda-2 & -1\\ -1 & 0 & \lambda-3\end{pmatrix}\right|=0$$

$$\begin{vmatrix}\lambda & 0 & 2\\ -1 & \lambda-2 & -1\\ -1 & 0 & \lambda-3\end{vmatrix}=0$$

$$\lambda\begin{vmatrix}\lambda-2 & -1\\ 0 & \lambda-3\end{vmatrix}-0\begin{vmatrix}-1 & -1\\ -1 & \lambda-3\end{vmatrix}+2\begin{vmatrix}-1 & \lambda-2\\ -1 & 0\end{vmatrix}=0$$

$\lambda[(\lambda-2)(\lambda-3)+0]+0+2[0+(\lambda-2)]=0$

$\lambda(\lambda-2)(\lambda-3)+2(\lambda-2)=0$

$(\lambda-2)[\lambda(\lambda-3)+2]=0$

$(\lambda-2)(\lambda^2-3\lambda+2)=0$

$(\lambda-2)(\lambda-2)(\lambda-1)=0$

$\therefore$ Jadi nilai eigen matriks A adalah $\lambda_1=2, \lambda_2=2$ dan $\lambda_3=1$.

Vektor eigen

$(\lambda I-A)\bar{x}=0$

(Untuk $\boldsymbol{\lambda=2}$)

$$\begin{pmatrix}\lambda & 0 & 2\\ -1 & \lambda-2 & -1\\ -1 & 0 & \lambda-3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\\ 0\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}2 & 0 & 2\\ -1 & 0 & -1\\ -1 & 0 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\\ 0\end{pmatrix}$$

Diperoleh:

$2x_1+2x_3=0$

$x_1=-x_3$

Misalkan $x_2=s$ dan $x_3=t$, maka

$$\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-t\\ s\\ t\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ s\\ 0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-t\\ 0\\ t\end{pmatrix}=s\begin{pmatrix}0\\ 1\\ 0\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}-1\\ 0\\ 1\end{pmatrix}$$

$\therefore$ Jadi vektor eigennya adalah

$$\bar{u} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \bar{v} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

(Untuk $\boldsymbol{\lambda = 1}$)

$$\begin{pmatrix} \lambda & 0 & 2 \\ -1 & \lambda - 2 & -1 \\ -1 & 0 & \lambda - 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Diperoleh:

- $x_1 + 2x_3 = 0$

  $x_1 = -2x_3$

- $-x_1 - x_2 - x_3 = 0$

  $x_2 = -x_1 - x_3$

  $x_2 = -(-2x_3) - x_3$

  $x_2 = 2x_3 - x_3$

  $x_2 = x_3$

Misalkan $x_3 = s$, maka

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2s \\ s \\ s \end{pmatrix} = s \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

∴ Jadi vektor eigennya adalah

$$\bar{w} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Latihan Soal

1. Tentukan nilai eigen dari matriks-matriks berikut:

   a. $A = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 \\ -6 & -2 & 0 \\ 19 & 5 & -4 \end{pmatrix}$

   b. $B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -1 & 4 & -1 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$

2. Tentukan nilai eigen dan vektor eigen dari matriks-matriks berikut:

   a. $A = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 2 \\ 2 & 4 & 2 \\ 2 & 2 & 4 \end{pmatrix}$

   b. $B = \begin{pmatrix} 5 & 6 & 2 \\ 0 & -1 & -8 \\ 1 & 0 & -2 \end{pmatrix}$

   c. $C = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Latihan Soal

1. Hitunglah nilai determinan berikut dengan menggunakan Metode Ekspansi Kofaktor:

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 1 & 6 \\ -1 & 3 & 2 \end{vmatrix}!$$

2. Tentukan nilai eigen dan vektor eigen dari matriks-matriks berikut:
   c. $A = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 \\ -6 & -2 & 0 \\ 19 & 5 & -4 \end{pmatrix}$
   d. $B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -1 & 4 & -1 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$
3. Hitunglah nilai determinan berikut dengan menggunakan Metode Sarrus:
$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 5 \\ 1 & 5 & 12 \end{vmatrix}\ !$$
4. Hitunglah nilai determinan berikut dengan menggunakan metode Ekspansi Kofaktor:
$$|B| = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 0 & 4 & 5 \\ -2 & 1 & 4 \end{vmatrix}\ !$$
5. Tentukan nilai eigen dan vektor eigen dari matriks berikut:
$$A = \begin{pmatrix} 10 & -9 & 0 \\ 4 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}\ !$$

B. Fungsi

Contoh

1. Gambarlah grafik fungsi kuadrat berikut ini:
   a. $y =- x^2 - 2x + 3$

   Jawab

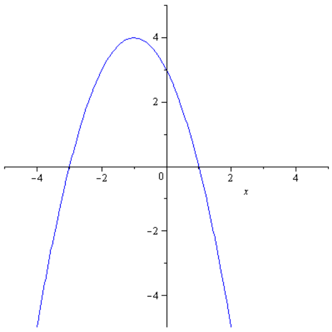
   Titik Potong di Sumbu y
   - $x = 0$
   - $y = f(0) =- (0)^2 - 2(0) + 3 = 0 + 0 + 3 = 3$
   - $(\mathbf{0}, \mathbf{3})$

   Titik Potong di Sumbu x
   - $y = 0$
   - $0 =- x^2 - 2x + 3$
     $0 = (-x + 1)(x + 3)$
     $x_1 = 1$ atau $x_2 = -3$
   - $(\mathbf{1}, \mathbf{0})$ dan $(\mathbf{-3}, \mathbf{0})$

   Kecekungan
   - Karena koefisien dari variabel dengan pangkat tertinggi nilainya negatif, maka kurva cekung ke bawah

   Titik puncak
   - Bentuk umum: $ax^2 + bx + c = 0$
   - $x_p = -\frac{b}{2a} = -\frac{-2}{2(-1)} = -1$
   - $y_p = f(x_p) = f(-1) =- (-1)^2 - 2(-1) + 3 = -1 + 2 + 3 = 4$
   - $(\boldsymbol{x_p}, \boldsymbol{y_p}) = (\mathbf{-1}, \mathbf{4})$

   Grafik



b. $y = -x^2 + 4$
c. $y = x^2 + 6x$
d. $y = x^2 - 4x + 4$

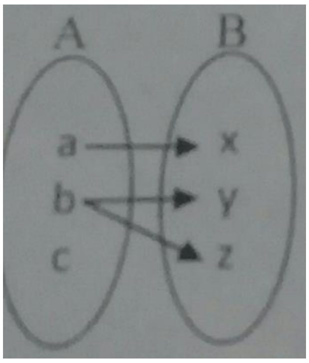
Latihan Soal

1. Gambarlah grafik fungsi kuadrat berikut ini:
$$f(x) = -2x^2 + 12x - 10\ !$$
2. Gambarlah grafik fungsi kuadrat berikut ini:
$$f(x) = -x^2 - x\ !$$
3. Tentukan apakah fungsi berikut adalah fungsi ganjil atau genap
   a. $f(x) = -4$
   b. $h(x) = \frac{x}{x^2-1}$
4. Jika $g(x) = x + 2$ dan $(f \circ g)(x) = 4x - 6$. Tentukan fungsi $f(x)$!
5. Diberikan $f(x) = x - 1$ dan $(f \circ g)(x) = 3x + 4$. Tentukan fungsi $g(x)$!
6. Tentukan fungsi invers dari fungsi-fungsi berikut
   a. $f(x) = \frac{3x+4}{2x-1}, x \neq \frac{1}{2}$
   b. $f(x) = \sqrt[3]{x-5} - 8$

<u>Relasi</u>

Relasi adalah aturan yang menghubungkan antara anggota satu himpunan dengan anggota himpunan lainnya.

Contoh



Relasi himpunan A dan B adalah himpunan bagian dari hasil kali kartesian $A \times B$. Hasil kali kartesian $A \times B$ adalah himpunan yang elemennya semua pasangan terurut yang mungkin terbentuk dengan komponen pertama dari himpunan A dan komponen kedua dari himpunan B.

$A \times B = \{(a, b) | a \in A \text{ dan } b \in B\}$

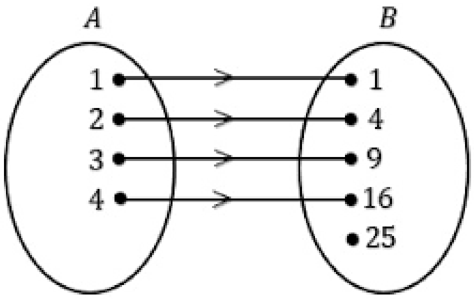
Contoh

1. Himpunan $A = \{1, 2, 3\}$ dan $B = \{4, 5, 6\}$. Tentukan $A \times B$!
2. Himpunan $A = \{-1, 5\}$ dan $B = \{7, 10\}$. Tentukan $A \times B$!

<u>Fungsi</u>

Fungsi adalah relasi khusus yang memetakan setiap anggota himpunan A tepat satu ke anggota himpunan B. Fungsi $f(x)$ artinya nilai fungsi f di x.

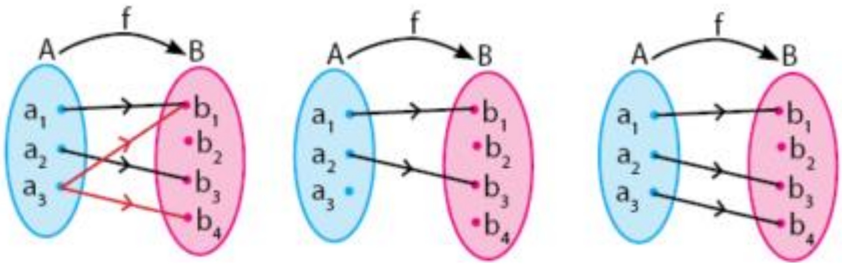
Contoh



Himpunan $A = \{1, 2, 3, 4\}$ disebut daerah asal (domain), himpunan $B = \{1, 4, 9, 16, 25\}$ disebut daerah kawan (kodomain), dan himpunan $\{1, 4, 9, 16\}$ disebut daerah hasil (*range*).

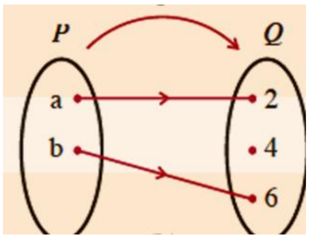
Contoh

1. Tentukan apakah gambar berikut fungsi atau bukan:

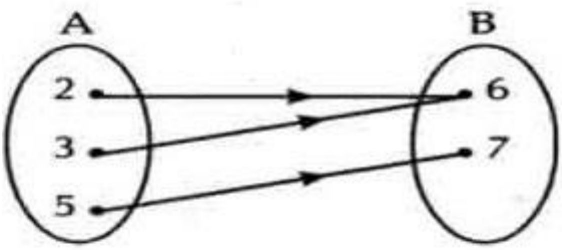


Definisi. Diberikan fungsi $f: A \to B$, maka:

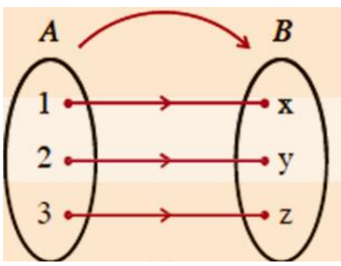
1. Fungsi f dikatakan injektif (satu-satu) jika untuk setiap $x_1 \neq x_2$, maka $f(x_1) \neq f(x_2)$.



2. Fungsi f dikatakan surjektif (pada/onto) jika $f(A) = B$.



3. Fungsi f dikatakan bijektif jika f fungsi injektif dan surjektif.



C. Fungsi rekursif

Fungsi f dikatakan fungsi rekursif jika definisi fungsinya mengacu pada dirinya sendiri

Contoh

1. $f(x) = \begin{cases} 0 & ,x = 0 \\ 2f(x-1) + x^2, & x \neq 0 \end{cases}$

   Tentukan $f(5)$!

   Jawab

   - $f(0) = 0$
   - $f(1) = 2f(0) + 1^2 = 2(0) + 1 = 0 + 1 = 1$
   - $f(2) = 2f(1) + 2^2 = 2(1) + 4 = 2 + 4 = 6$
   - $f(3) = 2f(2) + 3^2 = 2(6) + 9 = 12 + 9 = 21$
   - $f(4) = 2f(3) + 4^2 = 2(21) + 16 = 42 + 16 = 58$

   $\therefore$ $f(5) = 2f(4) + 5^2 = 2(58) + 25 = 116 + 25 = 141$

2. $f(n) = \begin{cases} 0 & ,n = 0 \\ 1 & ,n = 1 \\ f(n-1) + f(n-2), & n > 1 \end{cases}$

   Tentukan $f(6)$!

3. Tentukan nilai $f(5)$ dari fungsi berikut:

   $$f(n) = \begin{cases} 3 & ,n = 0 \\ 2f(n-1) + 4, & n > 0 \end{cases}!$$

4. Carilah nilai $f(5)$ dari fungsi berikut:

   $$f(n,x) = \begin{cases} 0 & ,n = 0 \\ x & ,n = 1 \\ 2xf(n-1,x) - f(n-2,x), & n > 1 \end{cases}$$

Latihan Soal

1. Tentukan apakah fungsi berikut adalah fungsi ganjil atau genap
   a. $f(x) = x^3 - 3x$
   b. $h(x) = 4x^2 - 7$
2. Jika $(f \circ g)(x) = \frac{7x+18}{x+4}$ dan $g(x) = x + 4$. Tentukan fungsi $f(x)$!
3. Diberikan $(f \circ g)(x) = (x+3)^2$ dan $f(x) = 12x + 36$. Tentukan fungsi $g(x)$!
4. Tentukan fungsi invers dari fungsi-fungsi berikut
   a. $f(x) = \frac{x+10}{2x-1}, x \neq \frac{1}{2}$
   b. $f(x) = x^2 - 4x + 1$
5. Tentukan nilai $f(5)$ dari fungsi berikut:

   $$f(n) = \begin{cases} 1 & ,n = 0 \\ a \cdot f(n-1), & n > 0 \end{cases}!$$

6. Tentukan nilai $f(4)$ dari fungsi berikut:

   $$f(n) = \begin{cases} 1 & ,n = 0 \\ 2f(n-1) + n^2, & n > 0 \end{cases}!$$

Latihan Soal

1. Gambarlah grafik fungsi kuadrat berikut ini:
   a. $y = x^2 + 6x$
   b. $y = x^2 - 4x + 4$

2. Tentukan nilai $f(5)$ dari fungsi berikut:
$$f(n) = \begin{cases} 3 & ,n = 0 \\ 2f(n-1) + 4, n > 0 \end{cases}!$$
3. Carilah nilai $f(5)$ dari fungsi berikut:
$$f(n, x) = \begin{cases} 0 & ,n = 0 \\ x & ,n = 1 \\ 2xf(n-1, x) - f(n-2, x), n > 1 \end{cases}!$$
4. Tentukan apakah fungsi berikut adalah fungsi ganjil atau genap
   a. $f(x) = 3x$
   b. $h(x) = x^2$
5. Untuk $f(x) = x^2 + x$ dan $g(x) = \frac{2}{x+3}$, carilah nilai $(g \circ f)(1)$!
6. Jika $(f \circ g)(x) = x^2 + 3x + 4$ dan $g(x) = 4x - 5$. Tentukan fungsi $f(x)$!
7. Diberikan $(f \circ g)(x) = 4x + 6$ dan $f(x) = 2x - 4$. Tentukan fungsi $g(x)$!
8. Tentukan fungsi invers dari fungsi-fungsi berikut
   a. $f(x) = 2x + 6$
   b. $f(x) = \frac{2x-5}{3x+1}, x \neq -\frac{1}{3}$
7. Gambarlah grafik fungsi kuadrat berikut ini:
$$f(x) = -x^2 - x\,!$$
8. Tentukan nilai $f(4)$ dari fungsi berikut:
$$f(n) = \begin{cases} 1 & ,n = 0 \\ 2f(n-1) + n^2, n > 0 \end{cases}!$$
9. Tentukan apakah fungsi berikut adalah fungsi ganjil atau genap
   a. $f(x) = -4$
   b. $h(x) = \frac{x}{x^2-1}$
10. Jika $g(x) = x + 2$ dan $(f \circ g)(x) = 4x - 6$. Tentukan fungsi $f(x)$!
11. Diberikan $f(x) = x - 1$ dan $(f \circ g)(x) = 3x + 4$. Tentukan fungsi $g(x)$!
12. Tentukan fungsi invers dari fungsi-fungsi berikut
    a. $f(x) = \frac{3x+4}{2x-1}, x \neq \frac{1}{2}$
    b. $f(x) = \sqrt[3]{x-5} - 8$
13. Buktikan bahwa
$$4 + 10 + 16 + \cdots + (6n - 2) = n(3n + 1)$$
    untuk setiap $n \in \mathbb{N}$!
14. Buktikan dengan induksi matematika bahwa 5^{2n-1} habis dibagi 5 untuk semua $n \in \mathbb{N}$!

Teorema Euclidean

Misalkan m dan n adalah dua buah bilangan bulat dengan syarat $n > 0$. Jika m dibagi dengan n maka terdapat dua buah bilangan bulat unik q (quotient) dan r (remainder) sedemikian sehingga
$$m = nq + r$$
dengan $0 \leq r < n$.

Bilangan n disebut pembagi (divisor), m disebut yang dibagi (dividend), q disebut hasil bagi (quotient), dan r disebut sisa (remainder).

- Notasi hasil bagi
  $q = m\ div\ n$
- Notasi sisa
  $r = m\ mod\ n$

Contoh

1. Tuliskan dalam bentuk $m = nq + r$ untuk bilangan 100 yang dibagi 3!

   Jawab

$$100 = (3).(33) + 1$$

2. Tuliskan dalam bentuk $m = nq + r$ untuk bilangan 57 yang dibagi 5!
3. Tuliskan dalam bentuk $m \; mod \; n = r$ untuk bilangan 50 yang dibagi 2!

   Jawab

$$50 \; mod \; 2 = 0$$

4. Tuliskan dalam bentuk $m \; mod \; n = r$ untuk bilangan 71 yang dibagi 3!
5. Carilah bilangan bulat q dan r sehingga $m = nq + r$:
   a. $m = 45 , n = 6$
   b. $m = 66 , n = 11$

Faktor Persekutuan Terbesar

Contoh

1. Carilah FPB dari bilangan 70 dan 11!

   Jawab

$$70 = (11).(6) + 4$$

$$11 = (4).(2) + 3$$

$$4 = (3).(1) + 1$$

$$3 = (1).(3) + 0$$

   Jadi FPB $(70,11) = 1$

2. Carilah FPB dari bilangan 48 dan 20!
3. Carilah FPB dari bilangan 45 dan 27!

Bilangan prima

Definisi. Bilangan bulat positif p $(p > 1)$ disebut bilangan prima jika pembaginya hanya 1 dan p.

Contoh

2, 3, 5, 7, 11, 13, dst

Bilangan komposit bilangan selain bilangan prima (memiliki faktor lebih dari 2).

Contoh

2, 4, 6, 8, 9, dst

Teorema. Setiap bilangan bulat positif yang lebih besar atau sama dengan 2 dapat dinyatakan sebagai perkalian satu atau lebih bilangan prima.

Contoh

7 = 1×7 (1 faktor prima)

10 = 2×5 (2 faktor prima)

50 = 2×5×5 (2 faktor prima)

Latihan Soal

1. Carilah faktor dari bilangan 18!

   Jawab

$$18 = 1 \times 18$$

$$18 = 2 \times 9$$

$$18 = 3 \times 6$$

Jadi faktor dari bilangan 18 adalah $1, 2, 3, 6, 9$ dan 18.

2. Tentukan faktor dari bilangan 30!
3. Carilah faktor prima dari bilangan 25!

   Jawab

$$\begin{array}{ccc} & 25 & \\ \swarrow & & \searrow \\ 5 & & 5 \end{array}$$

   Jadi faktor prima dari 25 adalah 5.

4. Tentukan faktor prima dari bilangan 60!
5. Carilah faktor prima dari bilangan 1200!

Relatif Prima

Definisi. Dua buah bilangan bulat a dan b disebut relatif prima jika FPB $(a, b) = 1$.

Contoh

1. Tentukan apakah dua buah bilangan 22 dan 3 adalah relatif prima? Jelaskan!

   Jawab

$$22 = (3).(7) + 1$$

$$3 = (1).(3) + 0$$

   Karena FPB $(22,3) = 1$ maka bilangan 22 dan 3 relatif prima.

2. Tentukan apakah dua buah bilangan 45 dan 12 adalah relatif prima? Jelaskan!
3. Tentukan apakah dua buah bilangan 50 dan 9 adalah relatif prima? Jelaskan!

Modulo

Contoh

1. Carilah hasil dari modulo berikut:
   a. $23\ mod\ 5$

      Jawab

      Karena $23 = (5).(4) + 3$, maka

      $23\ mod\ 5 = 3$

   b. $27\ mod\ 3$

   c. $6\ mod\ 8$

      Jawab

      Karena $6 = (8).(0) + 6$, maka

      $6\ mod\ 8 = 6$

   d. $2\ mod\ 5$

   e. $0\ mod\ 12$

      Jawab

      Karena $0 = (12).(0) + 0$, maka

      $0\ mod\ 12 = 0$

   f. $0\ mod\ 100$

   g. $-41\ mod\ 9$

      Jawab

      Karena $-41 = (9).(-5) + 4$, maka

      $-41\ mod\ 9 = 4$

   h. $-39\ mod\ 13$

Bilangan prima

Definisi. Bilangan bulat positif p $(p > 1)$ disebut bilangan prima jika pembaginya hanya 1 dan p.

Contoh

2, 3, 5, 7, 11, 13, dst

Bilangan komposit bilangan selain bilangan prima (memiliki faktor lebih dari 2).

Contoh

2, 4, 6, 8, 9, dst

Teorema. Setiap bilangan bulat positif yang lebih besar atau sama dengan 2 dapat dinyatakan sebagai perkalian satu atau lebih bilangan prima.

Contoh

7 = 1×7 (1 faktor prima)

10 = 2×5 (2 faktor prima)

50 = 2×5×5 (2 faktor prima)

Latihan Soal

1. Carilah faktor dari bilangan 18!

   Jawab

$$18 = 1 \times 18$$
$$18 = 2 \times 9$$
$$18 = 3 \times 6$$

   Jadi faktor dari bilangan 18 adalah $1, 2, 3, 6, 9$ dan 18.

2. Tentukan faktor dari bilangan 30!
3. Carilah faktor prima dari bilangan 25!

   Jawab

$$25$$
$$5 \qquad 5$$

   Jadi faktor prima dari 25 adalah 5.

4. Tentukan faktor prima dari bilangan 60!
5. Carilah faktor prima dari bilangan 1200!

Relatif Prima

Definisi. Dua buah bilangan bulat a dan b disebut relatif prima jika FPB $(a, b) = 1$.

Contoh

1. Tentukan apakah dua buah bilangan 22 dan 3 adalah relatif prima? Jelaskan!

   Jawab

$$22 = (3).(7) + 1$$
$$3 = (1).(3) + 0$$

   Karena FPB $(22{,}3) = 1$ maka bilangan 22 dan 3 relatif prima.

2. Tentukan apakah dua buah bilangan 45 dan 12 adalah relatif prima? Jelaskan!
3. Tentukan apakah dua buah bilangan 50 dan 9 adalah relatif prima? Jelaskan!

Kriptografi

Definisi. Kriptografi adalah ilmu sekaligus seni untuk menjaga keamanan pesan. Keamanan pesan dapat diperoleh dengan menyandikannya menjadi pesan yang tidak mempunyai makna.

$$\boxed{\text{Plainteks}} \xrightarrow{\text{enkripsi}} \boxed{\text{Cipherteks}} \xrightarrow{\text{dekripsi}} \boxed{\text{Plainteks asal}}$$

Plainteks : Pesan yang dirahasiakan.
Cipherteks : Teks tersandi.
Enkripsi : Proses menjadikan plainteks menjadi cipherteks.
Dekripsi : Proses membalikkan cipherteks menjadi plainteks.

Permutasi

$$P_r^n = \frac{n!}{(n-r)!}$$

Kaidah perkalian

$$\ldots \times \ldots \times \ldots = \cdots$$

Contoh

1. Berapa banyak cara 5 orang memasuki 3 pintu?

   Jawab

   $$P_3^5 = \frac{5!}{(5-3)!} = \frac{5!}{2!} = \frac{5 \times 4 \times 3 \times 2!}{2!} = 60.$$

2. Berapa banyak cara mengurutkan nama 25 orang mahasiswa?
3. Berapa banyak kata yang terbentuk dari kata “KUAT”?
4. Suatu kata disusun dengan menggunakan tiga huruf yang diambil dari himpunan $\{a, b, c, d, e, f\}$. Tentukan banyaknya kata yang bisa dibuat jika.
   a. Huruf-huruf bisa digunakan berulang.
   b. Huruf-huruf hanya boleh digunakan sekali.

   Jawab

   a. Kaidah perkalian
      $6 \times 6 \times 6 = 216$
   b. Kaidah perkalian
      $6 \times 5 \times 4 = 120$
5. Dari angka-angka 2, 3, 4, 5, 6, 7, dan 8 akan dibuat bilangan ratusan genap yang lebih dari 500. Jika angka-angka tadi hanya boleh digunakan sekali, tentukan banyaknya bilangan yang bisa dibuat?
6. Berapa banyak kata yang terbentuk dari kata “MATEMATIKA”?

   Jawab

   $$\boldsymbol{P(n; n_1, n_2, \ldots, n_k) = \frac{n!}{n_1!\, n_2! \ldots n_k!}}$$

   $$P(10; 2, 3, 2, 1, 1, 1) = \frac{10!}{2!\,3!\,2!\,1!\,1!\,1!} = \frac{10 \times 9 \times 8 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3!}{2!\,3!\,2!\,1!\,1!\,1!}$$

   $$= \frac{10 \times 9 \times 8 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4}{2 \times 2 \times 1 \times 1 \times 1} = 10 \times 9 \times 8 \times 7 \times 6 \times 5 = 151.200.$$

7. Berapa banyak kata yang terbentuk dari kata “MISSISSIPPI”?

Latihan Soal

1. Tuliskan dalam bentuk $m = nq + r$ untuk bilangan 667 yang dibagi 25 !
2. Tuliskan dalam bentuk $m \bmod n = r$ untuk bilangan 97 yang dibagi 12 !
3. Carilah bilangan bulat q dan r sehingga $m = nq + r$ dimana $m = 131$, $n = 3$!
4. Carilah FPB dari bilangan 160 dan 35 !

5. Carilah hasil dari modulo berikut:
   a. $49 \; mod \; 3$
   b. $1 \; mod \; 7$
   c. $0 \; mod \; 30$
   d. $-35 \; mod \; 6$
6. Carilah faktor dari bilangan 68 !
7. Carilah faktor prima dari bilangan 180 !
8. Tentukan apakah dua buah bilangan 25 dan 7 adalah relatif prima ? Jelaskan !
9. Tentukan banyaknya cara memilih dua huruf berbeda diambil dari kata.
   a. BUAH
   b. FISIKA
10. Berapa banyak kata yang terbentuk dari kata "BILLFATH" ?
11. Berapa banyak string (gabungan huruf) yang dapat dibentuk dari kata "SARUNG" dimana huruf vokal terletak saling bersebelahan ?
12. Ada 5 pemuda dan 3 pemudi duduk berjajar. Berapa cara kemungkinan mereka duduk jika ketiga pemudi tetap berkumpul ?
13. Dari 5 orang akan dipilih 3 orang untuk menjadi pengurus RT yang terdiri dari ketua, sekretaris dan bendahara. Tentukan banyaknya cara pemilihan yang mungkin !
14. 3 laki-laki dan 3 perempuan akan duduk melingkar. Berapa cara duduk jika:
   a. Posisi duduk bebas
   b. Perempuan selalu berkelompok dan laki-laki bebas
   c. Laki-laki dan perempuan masing-masing selalu berkelompok
15. Carilah koefisien suku kelima dari $(x+y)^7$!
16. Carilah koefisien suku ke-6 dari $(-x+y)^9$!
17. Carilah suku ke-4 dari $(x-y)^8$!
18. Tentukan koefisien suku ketiga dari $(2x+1)^6$!
19. Tentukan koefisien suku ke-5 dari $(3x-4)^7$!
20. Carilah suku ke-5 dari $(2x-1)^{10}$!

Rumus-rumus:

Permutasi : $P_r^n = \frac{n!}{(n-r)!}$

Permutasi siklis $= (n-1)!$

Kombinasi : $C_r^n = \frac{n!}{(n-r)!r!}$

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} C(n,k)\,.\,x^{n-k}.\,y^k$$

$$= C(n,0).\,x^n + C(n,1).\,x^{n-1}.\,y + \cdots + C(n,n-1).\,x.\,y^{n-1} + C(n,n).\,y^n$$

Peluang diskrit

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)}$$

$P(A) =$ Peluang kejadian A

$n(A) =$ Banyaknya kejadian A

$n(S) =$ Banyaknya titik sampel (ruang sampel)

Contoh

1. Pada pelemparan dua buah dadu. Berapa peluang muncul angka pada kedua dadu sama?

   Jawab

Ruang sampel $n(S)$ ada 36 yaitu

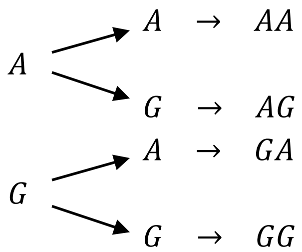
$(1,1)$	$(1,2)$	$(1,3)$	$(1,4)$	$(1,5)$	$(1,6)$
$(2,1)$	$(2,2)$	$(2,3)$	$(2,4)$	$(2,5)$	$(2,6)$
$(3,1)$	$(3,2)$	$(3,3)$	$(3,4)$	$(3,5)$	$(3,6)$
$(4,1)$	$(4,2)$	$(4,3)$	$(4,4)$	$(4,5)$	$(4,6)$
$(5,1)$	$(5,2)$	$(5,3)$	$(5,4)$	$(5,5)$	$(5,6)$
$(6,1)$	$(6,2)$	$(6,3)$	$(6,4)$	$(6,5)$	$(6,6)$

Terlihat 2 angka dadu yang sama adalah $(1,1), (2,2), (3,3), (4,4), (5,5)$ dan $(6,6)$ sehingga banyaknya $n(A) = 6$. Jadi $P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$.

2. Pada pelemparan 2 buah koin. Berapa peluang muncul dua-duanya gambar?

   Jawab

   1 koin 2 koin



   Ruang sampelnya adalah $\{AA, AG, GA, GG\}$ dimana $n(S) = 4$. Jumlah $n(A) = 1$ yaitu GG. Jadi $P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{1}{4}$.

Latihan soal

1. Dua buah dadu dilemparkan. Berapa peluang munculnya angka-angka dadu yang jumlahnya sama dengan 8?
2. Pada pelemparan sebuah dadu, berapa peluang munculnya angka prima?
3. Pada pelemparan 2 buah koin. Berapa peluang muncul 1 angka dan 1 gambar?
4. Pada pelemparan 3 buah koin. Berapa peluang muncul ketiganya angka?
5. Ada 5 orang mahasiswa jurusan matematika dan 7 orang mahasiswa jurusan informatika. Berapa banyak cara membentuk panitia yang terdiri dari 4 orang, jika:
   a. Tidak ada batasan jurusan.
   b. Semua anggota panitia harus dari jurusan matematika.
   c. Semua anggota panitia harus dari jurusan informatika.
   d. Semua anggota panitia harus dari jurusan yang sama.
   e. 2 orang mahasiswa per jurusan harus mewakili.
6. Tersedia 6 huruf yaitu a, b, c, d, e dan f. Berapa banyak cara pengurutan 3 huruf, jika:
   a. Tidak ada huruf yang diulang
   b. Boleh ada huruf yang berulang
   c. Tidak boleh ada huruf yang diulang, tetapi huruf e harus ada

Prinsip Sarang Merpati (Pigeonhole Principle)

Teorema 1. Jika $n + 1$ atau lebih objek ditempatkan di dalam n buah kotak maka paling sedikit terdapat satu kotak yang berisi dua atau lebih objek.

Contoh

1. Ada 11 burung merpati dan 10 sarang burung merpati. Jadi ada minimal 1 sarang yang ditempati lebih dari 1 burung.

2. Dari 27 orang mahasiswa, paling sedikit terdapat 2 orang yang namanya diawali dengan huruf yang sama.

Fungsi Floor

$\lfloor x \rfloor$ = Bilangan bulat terbesar yang lebih kecil atau sama dengan x.

Fungsi Ceiling

$\lceil x \rceil$ = Bilangan bulat terkecil yang lebih besar atau sama dengan x.

Teorema 2. Jika M objek ditempatkan di dalam n buah kotak, maka paling sedikit terdapat satu kotak yang berisi minimal $\left\lceil \frac{M}{n} \right\rceil$ objek.

Contoh

1. Diantara 10 orang mahasiswa, terdapat paling sedikit $\left\lceil \frac{10}{7} \right\rceil = 2$ orang yang lahir pada hari yang sama.

Latihan Soal

1. Jika ada 3 orang berkumpul, berapa banyak orang paling sedikit berjenis kelamin sama?
2. Jika ada 15 orang mahasiswa, berapa paling sedikit mahasiswa lahir pada bulan yang sama?

Aljabar Boolean

Definisi 1. Misalkan B adalah himpunan yang didefinisikan pada dua operator biner + dan •, dan operator uner ′. Misalkan 0 dan 1 adalah dua elemen yang berbeda dari B. Maka tupel

$$\langle B, +, \bullet, ', 0, 1 \rangle$$

Disebut aljabar Boolean jika untuk setiap $a, b, c \in B$ berlaku aksioma (sering dinamakan postulat Huntington) berikut:

1. Identitas
   a. $a + 0 = a$
   b. $a.1 = a$
2. Komutatif
   a. $a + b = b + a$
   b. $a.b = b.a$
3. Distributif
   a. $a.(b + c) = (a.b) + (a.c)$
   b. $a + (b.c) = (a + b).(a + c)$
4. Komplemen
   Untuk setiap $a \in B$ terdapat elemen unik $u' \in B$ sehingga
   a. $a + a' = 1$
   b. $a.a' = 0$

Beberapa hukum aljabar Boolean (aksioma aljabar Boolean juga termasuk hukum):

1. Hukum idempoten
   a. $a + a = a$
   b. $a.a = a$
2. Hukum dominasi
   a. $a.0 = 0$
   b. $a + 1 = 1$
3. Hukum involusi
   a. $(a')' = a$

4. Hukum penyerapan
    a. $a + ab = a$
    b. $a(a + b) = a$
5. Hukum asosiatif
    a. $a + (b + c) = (a + b) + c$
    b. $a(bc) = (ab)c$
6. Hukum De Morgan
    a. $(a + b)' = a'b'$
    b. $(ab)' = a' + b'$
7. Hukum $0/1$
    a. $0' = 1$
    b. $1' = 0$

Tabel kebenaran

a	b	$a + b$	$a.b$
0	0	0	0
0	1	1	0
1	0	1	0
1	1	1	1

a	a'
0	1
1	0

$B = \{0,1\} =$ Binary digit (bit)

Contoh

1. Perlihatkan bahwa $a + a'b = a + b$!

    Jawab

$$a + a'b = a + b$$
$$(a + a').(a + b) = a + b$$
$$1.(a + b) = a + b$$
$$a + b = a + b$$

2. Perlihatkan bahwa $a(a' + b) = ab$!

Prinsip dualitas

Definisi 2. Misalkan S adalah kesamaan di dalam aljabar Boolean yang melibatkan operator $+, \bullet$, dan komplemen $'$, maka jika pernyataan S^* diperoleh dari S dengan cara mengganti

$\bullet$ dengan $+$

$+$ dengan $\bullet$

0 dengan 1

1 dengan 0

Dan membiarkan operator komplemen tetap apa adanya, maka kesamaan S^* juga benar. S^* disebut sebagai dual dari S.

Contoh

1. Tentukan dual dari
    a. $a + 0 = a$

Jawab

$a.1 = a$

b. $(a.1)(0 + a') = 0$

c. $(a + b)(b + c) = ac + b$

d. $(a + 1)(a + 0) = a$

Latihan Soal

1. Buktikan kebenaran dari aljabar Boolean

$$a'b + ab' + b' = a' + b'$$

menggunakan

a. Tabel kebenaran

b. Hukum-hukum aljabar Boolean

Hukum-hukum aljabar Boolean

1. Hukum identitas
   a. $a + 0 = a$
   b. $a.1 = a$
2. Hukum komutatif
   a. $a + b = b + a$
   b. $a.b = b.a$
3. Hukum distributif
   a. $a.(b + c) = (a.b) + (a.c)$
   b. $a + (b.c) = (a + b).(a + c)$
4. Hukum komplemen
   Untuk setiap $a \in B$ terdapat elemen unik $u' \in B$ sehingga
   a. $a + a' = 1$
   b. $a.a' = 0$
5. Hukum idempoten
   a. $a + a = a$
   b. $a.a = a$
6. Hukum dominasi
   a. $a.0 = 0$
   b. $a + 1 = 1$
7. Hukum involusi
   a. $(a')' = a$
8. Hukum penyerapan
   a. $a + ab = a$
   b. $a(a + b) = a$
9. Hukum asosiatif
   a. $a + (b + c) = (a + b) + c$
   b. $a(bc) = (ab)c$
10. Hukum De Morgan
   a. $(a + b)' = a'b'$
   b. $(ab)' = a' + b'$
11. Hukum $0/1$
   a. $0' = 1$
   b. $1' = 0$

Penjumlahan dan perkalian dari fungsi Boolean

Contoh

1. Misalkan $f(x,y) = xy' + y$ dan $g(x,y) = x' + y'$ maka

   $f(x,y) + g(x,y) = xy' + y + x' + y' = xy' + x' + y + y' = xy' + x' + 1$

   $f(x,y).\, g(x,y) = (xy' + y)(x' + y')$

Komplemen fungsi Boolean

Contoh

1. Tentukan komplemen dari fungsi Boolean $f(x,y,z) = x(y'z' + yz)$!

Cara 1 (Hukum De Morgan)

$f(x,y,z) = x(y'z' + yz)$

$f'(x,y,z) = x' + (y'z' + yz)' = x' + (y'z')'(yz)' = x' + (y + z)(y' + z')$

Catatan:

Hukum De Morgan

c. $(a + b)' = a'b'$

d. $(ab)' = a' + b'$

Cara 2 (Prinsip Dualitas)

$f(x,y,z) = x(y'z' + yz)$

Dualitas = $x + (y'+z')(y + z)$

Ganti setiap literal dengan komplemennya

$f'(x,y,z) = x' + (y + z)(y' + z')$

Latihan

1. Tentukan komplemen dari fungsi-fungsi Boolean berikut ini:
   a. $f(x,y,z) = x'(yz' + y'z)$
   b. $f(x,y,z) = x'y'z + xy'z'$
   c. $f(x,y,z) = xy'z' + xyz$
   d. $f(x,y,z) = (x + y + z)(x + y' + z)$
   e. $f(x,y,z) = (x + y' + z)(x + y' + z')$

Bentuk Kanonik

Term = Suku

$f(x,y,z) = x'y'z + xy'z + xyz$

Minterm

$g(x,y,z) = (x + y + z)(x + y' + z)(x + y' + z')$

Maksterm

Tabel kebenaran minterm dan maksterm dua peubah

x	y	Minterm		Maksterm	
		Suku	Lambang	Suku	Lambang
0	0	$x'y'$	m_0	$x + y$	M_0
0	1	$x'y$	m_1	$x + y'$	M_1
1	0	xy'	m_2	$x' + y$	M_2
1	1	xy	m_3	$x' + y'$	M_3

Tabel kebenaran minterm dan maksterm tiga peubah

x	y	z	Minterm		Maksterm	
			Suku	Lambang	Suku	Lambang
0	0	0	$x'y'z'$	m_0	$x+y+z$	M_0
0	0	1	$x'y'z$	m_1	$x+y+z'$	M_1
0	1	0	$x'yz'$	m_2	$x+y'+z$	M_2
0	1	1	$x'yz$	m_3	$x+y'+z'$	M_3
1	0	0	$xy'z'$	m_4	$x'+y+z$	M_4
1	0	1	$xy'z$	m_5	$x'+y+z'$	M_5
1	1	0	xyz'	m_6	$x'+y'+z$	M_6
1	1	1	xyz	m_7	$x'+y'+z'$	M_7

Bentuk Baku

SOP

$f(x,y,z) = y' + xy + x'yz$

POS

$f(x,y,z) = x(y'+z)(x'+y+z')$

Bentuk baku tidak harus memiliki literal yang lengkap, sedangkan bentuk kanonik harus memiliki literal yang lengkap.

Contoh (bentuk kanonik)

1. SOP = Sum Of Product (jumlah dari hasil kali)

   $$f(x,y,z) = \sum(1,4,7) = m_1 + m_4 + m_7 = x'y'z + xy'z' + xyz$$

2. POS = Product Of Sum (perkalian dari hasil jumlah)

   $$f(x,y,z) = \prod(0,2,3) = M_0M_2M_3 = (x+y+z)(x+y'+z)(x+y'+z')$$

Latihan Soal

1. Nyatakan fungsi-fungsi Boolean berikut dalam bentuk kanonik SOP dan POS:

   a. $f(x,y,z) = x + y'z$

   Jawab

   SOP

   $f(x,y,z) = x + y'z$

   - $x = x(1) = x(y+y') = xy + xy' = xy(1) + xy'(1) = xy(z+z') + xy'(z+z')$
     $= xyz + xyz' + xy'z + xy'z'$
   - $y'z = y'z(x+x') = xy'z + x'y'z$

   $\therefore$ $f(x,y,z) = x + y'z = xyz + xyz' + xy'z + xy'z' + xy'z + x'y'z$
   $= xyz + xyz' + xy'z + xy'z' + x'y'z = m_7 + m_6 + m_5 + m_4 + m_1$
   $= m_1 + m_4 + m_5 + m_6 + m_7 = \sum(1,4,5,6,7).$

   POS

   $f(x,y,z) = x + y'z = (x+y')(x+z)$

   - $(x+y') = (x+y'+zz') = (x+y'+z)(x+y'+z')$
   - $(x+z) = (x+z+yy') = (x+y+z)(x+y'+z)$

   $\therefore$ $f(x,y,z) = (x+y'+z)(x+y'+z')(x+y+z)(x+y'+z) = M_2M_3M_0$
   $= M_0M_2M_3 = \prod(0,2,3).$

b. $f(x, y, z) = xy + x'z$
c. $f(x, y, z) = y' + xy + x'yz'$
d. $f(x, y) = x + x'y$
e. $f(x, y) = x(x' + y)$
f. $f(x, y, z) = (x + z')(y' + z)$

Tugas

1. Terdapat 3 rute yang dapat dilalui kendaraan dari Tulungagung ke Lamongan, dan dua rute dari Lamongan ke Surabaya.
   a. Berapa banyak cara seseorang bepergian dengan kendaraan dari Tulungagung ke Surabaya melalui Lamongan?
   b. Berapa banyak cara seseorang bepergian pulang-pergi dengan kendaraan dari Tulungagung ke Surabaya melalui Lamongan?
2. Berapa banyak bilangan empat angka yang dapat dibentuk dari angka-angka $1, 2, 3, 5, 7$ dan 8, jika:
   a. Angka tidak boleh berulang
   b. Angka tidak boleh berulang dan harus lebih kecil dari 4000
3. Pada pelemparan 3 buah koin. Berapa peluang muncul tepat 2 gambar?
4. Tentukan komplemen dari fungsi Boolean $f(x, y) = x'y + xy' + y'$!
5. Nyatakan fungsi Boolean $f(x, y, z) = y' + xz$ dalam bentuk kanonik SOP dan POS !

Latihan Soal

1. Pada pelemparan 3 buah koin. Berapa peluang muncul tepat 2 angka?
2. Dua buah dadu dilemparkan. Berapa peluang munculnya angka-angka dadu yang jumlahnya sama dengan 5?

Teorema 1. Jika $n + 1$ atau lebih objek ditempatkan di dalam n buah kotak maka paling sedikit terdapat satu kotak yang berisi dua atau lebih objek.

Contoh

1. Ada 6 burung merpati dan 5 sarang burung merpati. Jadi ada minimal 1 sarang yang ditempati lebih dari 1 burung.

Fungsi Floor

$\lfloor x \rfloor$ = Bilangan bulat terbesar yang lebih kecil atau sama dengan x.

Fungsi Ceiling

$\lceil x \rceil$ = Bilangan bulat terkecil yang lebih besar atau sama dengan x.

Teorema 2. Jika M objek ditempatkan di dalam n buah kotak, maka paling sedikit terdapat satu kotak yang berisi minimal $\left\lceil \frac{M}{n} \right\rceil$ objek.

Contoh

1. Diantara 50 orang mahasiswa, terdapat paling sedikit $\left\lceil \frac{50}{12} \right\rceil = 5$ orang yang lahir pada bulan yang sama.
2. Di dalam kelas terdapat 27 mahasiswa. Berapa paling sedikit mahasiswa mendapatkan nilai yang sama? (nilainya A, B, C, D, atau E)

Latihan Soal

1. Buktikan kebenaran dari aljabar Boolean
$$ab' + ab = a$$
   menggunakan

a. Hukum-hukum aljabar Boolean
b. Tabel kebenaran

2. Tentukan komplemen dari fungsi-fungsi Boolean berikut ini:
   a. $f(x, y, z) = xy + x'yz$
   b. $f(x, y, z) = (x + y + z)(x + y' + z)$
3. Nyatakan fungsi-fungsi Boolean berikut dalam bentuk kanonik SOP dan POS:
   a. $f(x, y, z) = y' + xz$
   b. $f(x, y, z) = (x + z')y'$

Konversi antar bentuk kanonik

Misalkan f adalah fungsi Boolean dalam bentuk SOP dengan 3 peubah

$$f(x, y, z) = \sum(1, 4, 5, 6, 7)$$

maka komplemennya

$$f'(x, y, z) = \sum(0, 2, 3) = m_0 + m_2 + m_3$$

dengan menggunakan hukum De Morgan, didapatkan f dalam bentuk POS

$$f(x, y, z) = \left(f'(x, y, z)\right)' = (m_0 + m_2 + m_3)' = m_0'.m_2'.m_3' = (x'y'z')'.(x'yz')'.(x'yz)'$$

$$= (x + y + z)(x + y' + z)(x + y' + z') = M_0.M_2.M_3 = \prod(0, 2, 3)$$

Kesimpulan

$m_j{}' = M_j$

Contoh

1. Nyatakan $g(x, y, z) = \sum(1,2,5,6)$ dalam bentuk POS dengan prosesnya!
2. Nyatakan $f(x, y, z) = \prod(0, 2, 4,5)$ dalam bentuk SOP dengan prosesnya!

Latihan Soal

1. Carilah FPB dari bilangan 210 dan 28 !
2. Carilah hasil dari modulo berikut:
   a. $2 \; mod \; 4$
   b. $-3 \; mod \; 4$
3. Berapa banyak bilangan ratusan yang dapat dibentuk dari angka-angka $0, 2, 4, 6, 9$, jika angka tidak boleh berulang dan harus lebih kecil dari 500 ?
4. Pada pelemparan 2 buah dadu. Berapa peluang jumlah 2 dadu yang muncul kurang dari sama dengan 5 ?
5. Jabarkan bentuk perpangkatan $(3x - 2y)^4$!
6. Pelihatkan bahwa $C_k^n = C_{n-k}^n$!
7. Tentukan komplemen dari fungsi Boolean $(x, y) = x'y' + x'y$!
8. Nyatakan fungsi Boolean $f(x, y, z) = x' + yz'$ dalam bentuk kanonik SOP dan POS !
9. Nyatakan $f(x, y, z) = \sum(1, 3, 4, 7)$ dalam bentuk POS dengan prosesnya !