MATEMATIKA TEKNIK 1

Persamaan Differensial Biasa

Persamaan differensial adalah persamaan yang mengandung beberapa turunan dari suatu fungsi. Persamaan differensial dibagi menjadi dua yaitu persamaan differensial biasa (*ordinary differential equation*) dan persamaan differensial parsial (*partial differential equation*). Persamaan differensial biasa adalah persamaan differensial yang mempunyai satu fungsi variabel bebas. Misalkan untuk persamaan $y = f(x)$, maka x disebut variabel bebas dan y disebut variabel tak bebas. Berikut contoh persamaan differensial biasa:

$$\frac{dy}{dx} + y = 3x$$

Persamaan differensial parsial adalah persamaan differensial yang mempunyai fungsi dengan jumlah variabel bebas lebih dari satu. Berikut contoh persamaan differensial parsial:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

Orde/tingkat suatu persamaan differensial adalah tingkat turunan tertinggi persamaan differensial tersebut. Berikut contoh orde dari persamaan differensial biasa:

- Orde 3

$$\frac{d^3 y}{dx^3} + 2\frac{d^2 y}{dx^2} - \frac{dy}{dx} = 2$$

- Orde 2

$$5\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{dy}{dx}$$

- Dan lain-lain

Derajat suatu persamaan differensial adalah pangkat dari turunan yang tertinggi di dalam persamaan differensial tersebut. Berikut contoh derajat dari persamaan differensial biasa:

- Derajat 2

$$\left(\frac{d^3 y}{dx^3}\right)^2 + x\left(\frac{d^2 y}{dx^2}\right) + \frac{dy}{dx} = 0$$

- Derajat 3

$$(y')^3 + y^2 = 5$$

- Dan lain-lain

Latihan Soal

1. Tentukan orde dan derajat dari beberapa persamaan differensial biasa berikut:
   a. $\frac{dy}{dt} = 2t + 5$
   b. $\left(\frac{dy}{dt}\right)^4 - 10t^5 = 0$
   c. $\frac{d^2 y}{dt^2} + 4\left(\frac{dy}{dt}\right)^3 - 19y = 0$
   d. $\left(\frac{d^2 y}{dt^2}\right)^3 + 5\left(\frac{dy}{dt}\right)^7 = 0$
   e. $\left(\frac{d^3 y}{dt^3}\right)^4 - 3\left(\frac{d^2 y}{dt^2}\right)^6 + 2\frac{dy}{dt} = 3$
   f. $\frac{dy}{dt} + \left(\frac{d^2 y}{dt^2}\right)^3 = 0$

g. $9t + 5\left(\frac{dy}{dt}\right)^7 = 4$

h. $3\left(\frac{dy}{dt}\right)^3 - \frac{d^2y}{dt^2} - 17 = 2$

i. $2\left(\frac{dy}{dt}\right)^7 - \left(\frac{d^2y}{dt^2}\right)^3 = 0$

PDB orde satu dapatdinyatakan dalam bentuk:

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y)$$

atau dalam bentuk:

$$M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0$$

yang dapat diselesaikan dengan cara:

1. Integrasi Langsung
2. Metode Pemisahan Variabel

Integrasi Langsung

Contoh

1. Selesaikan persamaan-persamaan differensial berikut:

a. $\frac{dy}{dx} = \frac{x+3x^2}{y^2}$

Jawab

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x + 3x^2}{y^2}$$

$$y^2 dy = (x + 3x^2)dx$$

$$\int y^2\, dy = \int (x + 3x^2)\, dx$$

$$\frac{y^3}{3} + c_1 = \frac{x^2}{2} + x^3 + c_2$$

$$\frac{y^3}{3} - \frac{x^2}{2} - x^3 + C = 0$$

b. $\frac{dy}{dx} = 4x^2 + 2x + 3$

c. $x\frac{dy}{dx} = x^2 - x + 1$

2. Tentukan solusi PD dengan masalah nilai awal berikut:

a. $e^x \frac{dy}{dx} = 4$ dimana $f(0) = 3$

Jawab

$$e^x \frac{dy}{dx} = 4$$

$$dy = \frac{4}{e^x} dx$$

$$\int dy = \int \frac{4}{e^x} dx$$

$$\int dy = \int 4e^{-x}\, dx$$

$$y + c_1 = -4e^{-x} + c_2$$

$$y = -\frac{4}{e^x} + C$$

Karena $f(0) = 3$, maka

$$f(x) = -\frac{4}{e^x} + C$$
$$f(0) = -\frac{4}{e^0} + C$$
$$3 = -\frac{4}{1} + C$$
$$3 = -4 + C$$
$$3 + 4 = C$$
$$C = 7$$

Jadi solusi dari PD tersebut adalah $y = -\frac{4}{e^x} + 7$.

b. $\frac{dy}{dx} = -x^2$ dimana $f(0) = 1$

c. $\frac{dy}{dx} = x^2 + 1$ dimana $f(1) = 1$

Persamaan Differensial Biasa

Latihan Soal

1. Tentukan orde dan derajat dari beberapa persamaan differensial biasa berikut:
   a. $\frac{d^2y}{dx^2} - \frac{2}{x^2} y = 0$
   b. $\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = \frac{x^2}{y^2}$
   c. $y'' + y = \sec^3 \theta$

<u>Integrasi Langsung</u>

Contoh

1. Selesaikan persamaan-persamaan differensial berikut:
   a. $\frac{dy}{dx} = 4x^2 + 2x + 3$
   b. $x\frac{dy}{dx} = x^2 - x + 1$
   c. $y\frac{dy}{dx} - 4x = 0$
2. Tentukan solusi PD dengan masalah nilai awal berikut:
   a. $\frac{dy}{dx} = -x^2$ dimana $f(0) = 1$
   b. $\frac{dy}{dx} = x^2 + 1$ dimana $f(1) = 1$
   c. $\frac{dy}{dx} = 3y^{\frac{2}{3}}$ dimana $y(2) = 0$

<u>Metode Pemisahan Variabel</u>

Contoh

1. Selesaikan persamaan-persamaan differensial berikut dengan metode pemisahan variabel:
   a. $\frac{dy}{dx} = (1 + x)(1 + y)$

   Jawab

$$\frac{dy}{dx} = (1 + x)(1 + y)$$
$$\frac{dy}{(1 + y)} = (1 + x)dx$$
$$\int \frac{1}{(1 + y)} dy = \int (1 + x)\, dx$$

$$\ln(1+y)+c_1 = x+\frac{1}{2}x^2+c_2$$
$$\ln(1+y)-x-\frac{1}{2}x^2+C=0$$

b. $\frac{dy}{dx}=\frac{2xy}{y-1}$

c. $y'=\frac{x^2}{1+y^2}$

<u>Persamaan Differensial Homogen</u>

Suatu fungsi dikatakan homogen derajat n jika ada suatu konstanta n sehingga untuk setiap parameter λ berlaku:

$$f(\lambda x,\lambda y)=\lambda^n f(x,y)$$

Misal:

$$\begin{aligned} f(x,y) &= x^2+xy \\ f(\lambda x,\lambda y) &= (\lambda x)^2+(\lambda x)(\lambda y) \\ &= \lambda^2x^2+\lambda^2xy \\ &= \lambda^2(x^2+xy) \\ f(\lambda x,\lambda y) &= \lambda^2 f(x,y) \end{aligned}$$

Maka $f(x,y)$ homogen derajat 2.

Untuk persamaan differensial orde 1:

$$M(x,y)dx+N(x,y)dy=0$$

disebut homogen jika M dan N keduanya homogen berderajat sama yaitu n.

Contoh:

1. Carilah penyelesaian umum persamaan-persamaan berikut:
   a. $(x+y)dx+xdy=0$

   Jawab

   - $M(x,y)=(x+y)$
     $M(\lambda x,\lambda y)=\lambda x+\lambda y$
     $=\lambda(x+y)$
     $M(\lambda x,\lambda y)=\lambda M(x,y)$
   - $N(x,y)=x$
     $N(\lambda x,\lambda y)=\lambda x$
     $N(\lambda x,\lambda y)=\lambda N(x,y)$

   ➢ Homogen derajat 1

   Misalkan $u=\frac{y}{x}$ atau bisa ditulis $y=ux$, maka:

   $$\frac{dy}{dx}=x\frac{du}{dx}+u$$
   $$dy=\left(x\frac{du}{dx}+u\right)dx$$
   $$dy=xdu+udx$$

   Jadi

   $(x+y)dx+xdy=0$
   $(x+ux)dx+x(xdu+udx)=0$
   $(x+ux)dx+x^2du+uxdx=0$
   $(x+2ux)dx+x^2du=0$
   $x(1+2u)dx+x^2du=0$

$$\frac{1}{x^2(1+2u)} \times [x(1+2u)dx + x^2du] = [0] \times \frac{1}{x^2(1+2u)}$$
$$\frac{1}{x}dx + \frac{1}{1+2u}du = 0$$
$$\int \frac{1}{x}dx + \int \frac{1}{1+2u}du = 0$$
$$\ln x + c_1 + \frac{1}{2}\int \frac{2}{1+2u}du = 0$$
$$\ln x + c_1 + \frac{1}{2}\ln(1+2u) + c_2 = 0$$
$$\ln x + \frac{1}{2}\ln(1+2u) = C$$
$$\ln x + \frac{1}{2}\ln\left(1 + 2\frac{y}{x}\right) = C$$
$\therefore$ Jadi penyelesaiannya adalah $\ln x + \frac{1}{2}\ln\left(1+2\frac{y}{x}\right) = C$.

b. $(x^2 + y^2)dx - 2xydy = 0$

c. $2xyy' - y^2 + x^2 = 0$

Latihan Soal

1. Selesaikan persamaan differensial
$$\frac{dy}{dx} = x - 5\,!$$
2. Tentukan solusi persamaan differensial dengan masalah nilai awal
$$\frac{dy}{dx} - x = 0 \text{ dimana } y(0) = 2\,!$$
3. Selesaikan persamaan differensial berikut dengan metode pemisahan variabel:
$$\frac{dy}{dx} = 2xy\,!$$
4. Tentukan apakah persamaan differensial berikut adalah persamaan differensial homogen:
$$(x+y)dx + (2x+2y)dy = 0\,!$$
5. Carilah penyelesaian umum persamaan differensial homogen berikut:
$$(x^2 - xy + y^2)dx - xydy = 0\,!$$

<u>Persamaan Differensial (PD) Bentuk $(ax + by + c)dx + (px + qy + r)dy = 0$</u>

Contoh:

1. Carilah penyelesaian umum persamaan-persamaan berikut:

a. $(x + y + 1)dx + (2x + 2y + 1)dy = 0$

Jawab

- $M(x,y) = (x + y + 1)$
  $M(\lambda x, \lambda y) = \lambda x + \lambda y + 1$
  $\neq \lambda(x + y + 1)$
  $M(\lambda x, \lambda y) \neq \lambda M(x,y)$
- $N(x,y) = (2x + 2y + 1)$
  $N(\lambda x, \lambda y) = \lambda 2x + \lambda 2y + 1$
  $\neq \lambda(2x + 2y + 1)$
  $N(\lambda x, \lambda y) \neq \lambda N(x,y)$

➢ Bukan PD homogen

➢ Misalkan $z = x + y$, maka

$$\frac{dz}{dx} = 1 + \frac{dy}{dx}$$
$$dz = dx + dy$$

Karena $y = z - x$ dan $dy = dz - dx$, maka:

$$(x + y + 1)dx + (2x + 2y + 1)dy = 0$$
$$(x + z - x\ + 1)dx + (2x + 2(z - x) + 1)(dz - dx) = 0$$
$$(z\ + 1)dx + (2x + 2z - 2x + 1)(dz - dx) = 0$$
$$(z\ + 1)dx + (2z + 1)(dz - dx) = 0$$
$$(z\ + 1)dx + 2zdz - 2zdx + dz - dx = 0$$
$$(z - 2z + 1 - 1)dx + 2zdz + dz = 0$$
$$\frac{1}{z} \times [-zdx + 2zdz + dz] = [0] \times \frac{1}{z}$$
$$-dx + 2dz + \frac{1}{z}dz = 0$$
$$-\int 1\,dx + \int 2\,dz + \int \frac{1}{z}dz = 0$$
$$-x + 2z + \ln z + C = 0$$
$$-x + 2(x + y) + \ln(x + y) + C = 0$$
$$-x + 2x + 2y + \ln(x + y) + C = 0$$
$$x + 2y + \ln(x + y) + C = 0$$

∴ Jadi penyelesaiannya adalah $x + 2y + \ln(x + y) + C = 0$.

b. $(3x + 2y + 1)dx - (3x + 2y - 1)dy = 0$

c. $(2x - 4y + 5)y' + x - 2y + 3 = 0$

Tugas

1. Tentukan penyelesaian persamaan-persamaan differensial homogen berikut:
   a. $(x + y)dx + (2x + 2y)dy = 0$
   b. $(x^2 + y^2)dx - 2xydy = 0$
2. Carilah penyelesaian persamaan differensial bentuk $(ax + by + c)dx + (px + qy + r)dy = 0$ berikut:
$$(3x + 3y + 6)dx + (x + y + 2)dy = 0\ !$$

Latihan Soal

1. Selesaikan persamaan differensial
$$\frac{dy}{dx} = x + 5\ !$$
2. Tentukan solusi PD dengan masalah nilai awal berikut:
$$\frac{dy}{dx} = 2x^2 \text{ dimana } y(0) = 4\ !$$
3. Selesaikan persamaan differensial berikut dengan metode pemisahan variabel:
$$\frac{dy}{dx} = x(2y - 1)\ !$$
4. Tentukan apakah persamaan differensial berikut adalah persamaan differensial homogen:
   a. $(3x - y + 1)dx + (2x + y + 1)dy = 0$
   b. $(x + y)dx + (3x + 2y)dy = 0$
5. Tentukan penyelesaian persamaan differensial homogen
$$(2x + 3y)dx + (x + y)dy = 0\ !$$

6. Selesaikan persamaan differensial

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x}{2}\ !$$

7. Selesaikan persamaan differensial berikut dengan metode pemisahan variabel:

$$\frac{dy}{dx} = (2x+1)y\ !$$

8. Tentukan apakah persamaan differensial berikut adalah persamaan differensial homogen:

$$(2x-y)dx + (2x+y)dy = 0\ !$$

9. Carilah penyelesaian umum persamaan differensial homogen berikut:

$$(2x+y)dx + xdy = 0\ !$$

10. Carilah penyelesaian persamaan differensial bentuk

$$(ax+by+c)dx + (px+qy+r)dy = 0$$

berikut:

$$(x+y-2)dx + (2x+2y+1)dy = 0\ !$$

<u>Persamaan Differensial Eksak</u>

Misal diberikan persamaan:

$$M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0,$$

persamaan differensial eksak jika:

$$\frac{\partial M(x,y)}{\partial y} = \frac{\partial N(x,y)}{\partial x}.$$

Solusi umum persamaan differensial tersebut adalah $F(x,y) = C$, dimana:

$$F(x,y) = \int M(x,y)\,dx + g(y)$$

dan $g(y)$ didapatkan dari:

$$g(y) = \int \left(N(x,y) - \frac{\partial}{\partial y}\int M(x,y)\,dx\right)dy + c_1.$$

Contoh:

1. Tentukan solusi umum persamaan-persamaan differensial berikut:
   a. $(5x^2 + 2xy^3)dx + (3x^2y^2 - 2y^3)dy = 0$

   Jawab

   - $M(x,y) = 5x^2 + 2xy^3$
   - $N(x,y) = 3x^2y^2 - 2y^3$
   - $\frac{\partial M(x,y)}{\partial y} = \frac{\partial N(x,y)}{\partial x} = 6xy^2$ (persamaan differensial eksak)
   - $g(y) = \int \left(N(x,y) - \frac{\partial}{\partial y}\int M(x,y)\,dx\right)dy + c_1$

   $$= \int \left(3x^2y^2 - 2y^3 - \frac{\partial}{\partial y}\int (5x^2 + 2xy^3)\,dx\right)dy + c_1$$

   $$= \int \left(3x^2y^2 - 2y^3 - \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{5}{3}x^3 + x^2y^3\right)\right)dy + c_1$$

   $$= \int (3x^2y^2 - 2y^3 - 3x^2y^2)\,dy + c_1$$

$$= \int (-2y^3)\, dy + c_1$$
$$= \frac{-2}{4} y^4 + c_1$$
$$g(y) = -\frac{1}{2} y^4 + c_1$$

- $$F(x, y) = C$$
$$\int M(x, y)\, dx + g(y) = C$$
$$\int (5x^2 + 2xy^3)\, dx - \frac{1}{2} y^4 + c_1 = c_2$$
$$\frac{5}{3} x^3 + x^2 y^3 - \frac{1}{2} y^4 = C$$

∴ Jadi penyelesaiannya adalah $\frac{5}{3} x^3 + x^2 y^3 - \frac{1}{2} y^4 = C$.

b. $(3x^2 y - y)dx + (x^3 - x + 2y)dy = 0$
c. $(y - 3x^2)dx + xdy = 0$
d. $(2x + y)dx + (2y + x)dy = 0$
e. $(x + 2y)dx + (y^2 + 2x)dy = 0$

2. Tentukan apakah persamaan dfferensial berikut eksak atau bukan:
   a. $x^2 y dx - (xy^2 + y^3)dy = 0$
   b. $(x^2 + 2y)dx + (y^2 + 2x)dy = 0$

Persamaan Differensial Linear

Bentuk umum:

$$\frac{dy}{dx} + yP(x) = Q(x)$$

Penyelesaian:

$$y.e^{\int P(x)dx} = \int Q(x).e^{\int P(x)dx}\, dx + C$$

Contoh:

1. Carilah penyelesaian umum dari persamaan-persamaan differensial berikut:
   a. $\frac{dy}{dx} + y = 3 - 5x$

   Jawab

   - $P(x) = 1$
   - $Q(x) = 3 - 5x$
   - $y.e^{\int P(x)dx} = \int Q(x).e^{\int P(x)dx}\, dx + C$

   $$y.e^{\int 1dx} = \int (3 - 5x).e^{\int 1dx}\, dx + C$$
   $$y.e^x = \int (3 - 5x).e^x\, dx + C$$
   $$y.e^x = 3\int e^x\, dx - 5\int xe^x\, dx + C$$
   $$y.e^x = 3e^x - 5\int xe^x\, dx + C$$

   - $\int xe^x\, dx = \int u\, dv = uv - \int v\, du$
   - $u = x$

$du = dx$

- $dv = e^x dx$

$\int dv = \int e^x \, dx$

$v = e^x$

- $\int xe^x \, dx = \int u \, dv = uv - \int v \, du = xe^x - \int e^x \, dx = xe^x - e^x + c$
- $y.e^x = 3e^x - 5\int xe^x \, dx + C$

$y.e^x = 3e^x - 5(xe^x - e^x) + C$

$ye^x = 3e^x - 5xe^x + 5e^x + C$

$ye^x = 8e^x - 5xe^x + C$

∴ Jadi penyelesaiannya adalah $ye^x = 8e^x - 5xe^x + C$.

b. $\frac{dy}{dx} - \frac{2}{x}y = x$

c. $xdy - 2ydx = (x-2)e^x dx$

<u>Persamaan Differensial Bernoulli</u>

Bentuk umum:

$$\frac{dy}{dx} + yP(x) = y^n Q(x)$$

Jika $n = 0$ maka persamaan differensial Bernoulli menjad persamaan differensial linear.

Cara penyelesaian:

Substitusi:

$$z = \frac{1}{y^{n-1}}$$

Sehingga persamaan differensial menjadi persamaan differensial linear. Selanjutnya selesaikan persamaan differensial dengan cara persamaan differensial linear.

Contoh:

1. Carilah penyelesaian umum dari persamaan-persamaan differensial berikut:

a. $\frac{dy}{dx} + \frac{2y}{x} = xy^2$

Jawab

- $n = 2$
- $z = \frac{1}{y^{n-1}} = \frac{1}{y^{2-1}} = \frac{1}{y}$
- $y = \frac{1}{z} = z^{-1}$
- $\frac{dy}{dz} = -z^{-2} = -\frac{1}{z^2}$

Berdasarkan $\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dz} . \frac{dz}{dx}$, maka

- $\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{z^2}\frac{dz}{dx}$

Sehingga persamaan differensial menjadi:

- $-\frac{1}{z^2}\frac{dz}{dx} + \frac{2}{x} . \frac{1}{z} = x\left(\frac{1}{z}\right)^2$

$-z^2 \times \left[-\frac{1}{z^2}\frac{dz}{dx} + \frac{2}{x} . \frac{1}{z}\right] = \left[x . \frac{1}{z^2}\right] \times (-z^2)$

- $\frac{dz}{dx} - z . \frac{2}{x} = -x$ (persamaan differensial linear)
- $P(x) = -\frac{2}{x}$

- $Q(x) = -x$
- $z.e^{\int P(x)dx} = \int Q(x).e^{\int P(x)dx}\, dx + C$

$$z.e^{\int -\frac{2}{x}dx} = \int -x.e^{\int -\frac{2}{x}dx}\, dx + C$$

$$z.e^{-2\int \frac{1}{x}dx} = -\int x.e^{-2\int \frac{1}{x}dx}\, dx + C$$

$$z.e^{-2\ln x} = -\int x.e^{-2\ln x}\, dx + C$$

$$z.e^{\ln x^{-2}} = -\int x.e^{\ln x^{-2}}\, dx + C$$

$$z.x^{-2} = -\int x.x^{-2}\, dx + C$$

$$\frac{z}{x^2} = -\int x^{-1}\, dx + C$$

$$\frac{z}{x^2} = -\int \frac{1}{x} dx + C$$

$$\frac{z}{x^2} = -\ln x + C$$

$$\frac{\frac{1}{y}}{x^2} = -\ln x + C$$

$$\frac{1}{yx^2} = -\ln x + C$$

$\therefore$ Jadi penyelesaiannya adalah $\frac{1}{yx^2} = -\ln x + C$.

b. $\frac{dy}{dx} - y = xy^5$

c. $xy' + 3y = x^2y^2$

Latihan Soal:

1. Tentukan solusi umum persamaan-persamaan differensial eksak berikut:
   a. $(y - 3x^2)dx + xdy = 0$
   b. $(2x + y)dx + (2y + x)dy = 0$
   c. $(x + 2y)dx + (y^2 + 2x)dy = 0$
2. Tentukan apakah persamaan dfferensial berikut eksak atau bukan:
   a. $x^2ydx - (xy^2 + y^3)dy = 0$
   b. $(x^2 + 2y)dx + (y^2 + 2x)dy = 0$
3. Carilah penyelesaian umum dari persamaan differensial linear
   $$xdy - 2ydx = (x - 2)e^x dx\ !$$
4. Carilah penyelesaian umum dari persamaan differensial Bernoulli
   $$xy' + 3y = x^2y^2\ !$$
5. Tentukan solusi umum persamaan differensial eksak
   $$(y - 3x^2)dx + xdy = 0\ !$$
6. Tentukan apakah persamaan dfferensial berikut eksak atau bukan:
   a. $x^2ydx - (xy^2 + y^3)dy = 0$
   b. $(x^2 + 2y)dx + (y^2 + 2x)dy = 0$
7. Carilah penyelesaian umum dari persamaan differensial linear
   $$\frac{dy}{dx} + \frac{y}{x} = x\ !$$

8. Carilah penyelesaian umum dari persamaan differensial Bernoulli

$$\frac{dy}{dx} + \frac{3y}{x} = xy^2 \; !$$

Persamaan Differensial Biasa Orde 2

Persamaan Differensial Orde 2 Bentuk $\boldsymbol{\frac{d^2y}{dx^2} = f(x)}$

Bentuk umum:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = f(x)$$

Contoh:

1. Carilah penyelesaian umum dari persamaan-persamaan differensial berikut:

   a. $\frac{d^2y}{dx^2} = 4x^3 + 3x^2 + x$

   Jawab

$$\frac{d^2y}{dx^2} = 4x^3 + 3x^2 + x$$
$$\frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right) = 4x^3 + 3x^2 + x$$
$$d\left(\frac{dy}{dx}\right) = (4x^3 + 3x^2 + x)dx$$
$$\int d\left(\frac{dy}{dx}\right) = \int (4x^3 + 3x^2 + x)\, dx$$
$$\frac{dy}{dx} = x^4 + x^3 + \frac{1}{2}x^2 + c_1$$
$$dy = \left(x^4 + x^3 + \frac{1}{2}x^2 + c_1\right)dx$$
$$\int dy = \int \left(x^4 + x^3 + \frac{1}{2}x^2 + c_1\right)dx$$
$$y = \frac{1}{5}x^5 + \frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{6}x^3 + c_1x + c_2$$

   b. $\frac{d^2y}{dx^2} = x^2 + x + 1$

   c. $\frac{d^2y}{dx^2} = \sin x$

   d. $\frac{d^2y}{dx^2} = \cos x$

   e. $\frac{d^2y}{dx^2} = e^x$

Persamaan Differensial Orde 2 Bentuk $\boldsymbol{a.\frac{d^2y}{dx^2} + b.\frac{dy}{dx} + c.y = 0}$ (Homogen)

Bentuk umum:

$$a.\frac{d^2y}{dx^2} + b.\frac{dy}{dx} + c.y = 0$$

Misalkan

- $\frac{d^2y}{dx^2} = m^2$
- $\frac{dy}{dx} = m$
- $y = 1$

Maka

$$a.\frac{d^2y}{dx^2} + b.\frac{dy}{dx} + c.y = 0$$
$$am^2 + bm + c = 0$$

Persamaan $am^2 + bm + c = 0$ disebut persamaan karakteristik dimana m_1 dan m_2 adalah akar-akar penyelesaian.

- Jika $m_1 \neq m_2$, maka penyelesaiannya
$$y = Ae^{m_1x} + Be^{m_2x}$$
dimana A dan B adalah konstanta.
- Jika $m_1 = m_2 = m$, maka penyelesaiannya
$$y = e^{mx}(A + Bx)$$
dimana A dan B adalah konstanta.

Contoh:

1. Carilah penyelesaian umum dari persamaan-persamaan differensial berikut:
   a. $\frac{d^2y}{dx^2} + 3\frac{dy}{dx} + 2y = 0$
   Jawab
   Persamaan karakteristiknya adalah
   $$m^2 + 3m + 2 = 0$$
   $$(m + 2)(m + 1) = 0$$
   $$m_1 = -2 \text{ dan } m_2 = -1$$
   Jadi penyelesaiannya adalah $y = Ae^{-2x} + Be^{-x}$ dimana A dan B adalah konstanta.
   b. $\frac{d^2y}{dx^2} + 6\frac{dy}{dx} + 9y = 0$
   Jawab
   Persamaan karakteristiknya adalah
   $$m^2 + 6m + 9 = 0$$
   $$(m + 3)^2 = 0$$
   $$m_{1,2} = -3$$
   Jadi penyelesaiannya adalah $y = e^{-3x}(A + Bx)$ dimana A dan B adalah konstanta.
   c. $\frac{d^2y}{dx^2} - \frac{dy}{dx} - 2y = 0$
   d. $\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{dy}{dx} - 6y = 0$
   e. $2\frac{d^2y}{dx^2} + 3\frac{dy}{dx} + y = 0$
   f. $\frac{d^2y}{dx^2} + 4\frac{dy}{dx} + 4y = 0$
   g. $\frac{d^2y}{dx^2} - 6\frac{dy}{dx} + 9 = 0$
   h. $4\frac{d^2y}{dx^2} + 4\frac{dy}{dx} + y = 0$

Tugas

1. Tentukan apakah persamaan differensial berikut eksak atau bukan:
   a. $x^2ydx - (xy^2 + y^3)dy = 0$
   b. $(x^2 + 2y)dx + (y^2 + 2x)dy = 0$
2. Tentukan solusi umum persamaan differensial eksak
$$(2x + y)dx + (2y + x)dy = 0\,!$$

3. Carilah penyelesaian umum dari persamaan differensial linear

$$\frac{dy}{dx}+\frac{y}{x}=x\ !$$

4. Carilah penyelesaian umum dari persamaan differensial Bernoulli

$$\frac{dy}{dx}+\frac{3y}{x}=xy^2\ !$$

5. Carilah penyelesaian umum dari persamaan-persamaan differensial berikut:
   a. $\frac{d^2y}{dx^2}=\sin x+\cos x$
   b. $\frac{d^2y}{dx^2}+3\frac{dy}{dx}-4y=0$

Persamaan Differensial Orde 2 Bentuk $\boldsymbol{a.\frac{d^2y}{dx^2}+b.\frac{dy}{dx}+c.y=f(x)}$ (Non Homogen)

Bentuk umum:

$$a.\frac{d^2y}{dx^2}+b.\frac{dy}{dx}+c.y=f(x)$$

atau

$$ay''+by'+cy=f(x)$$

Persamaan karakteristinya adalah $am^2+bm+c=0$, selanjutnya dicari solusi homogennya $y_h=Ae^{m_1x}+Be^{m_2x}$ atau $y_h=e^{mx}(A+Bx)$. Kemudian pilih y_p dengan melihat $f(x)$ sesuai dengan tabel berikut:

$f(x)$	y_p
e^{mx}	$y_p=Ae^{mx}$
x^n	$A_nx^n+A_{n-1}x^{n-1}+\cdots+A_1x+A_0$
$\sin wx$	$A\cos wx+B\sin wx$
$\cos wx$	$A\cos wx+B\sin wx$
$e^{ux}\sin wx$	$e^{ux}(A\cos wx+B\sin wx)$
$e^{ux}\cos wx$	$e^{ux}(A\cos wx+B\sin wx)$

Solusi dari persamaan differensial $a.\frac{d^2y}{dx^2}+b.\frac{dy}{dx}+c.y=f(x)$ adalah $y=y_h+y_p$.

Contoh:

1. Carilah penyelesaian umum dari persamaan-persamaan differensial berikut:
   a. $\frac{d^2y}{dx^2}-5\frac{dy}{dx}+6y=x^2$

   Jawab

   Persamaan karakteristiknya adalah

$$m^2-5m+6=0$$
$$(m-2)(m-3)=0$$
$$m_1=2 \text{ dan } m_2=3$$

   Jadi solusi homogennya adalah $y_h=Ae^{2x}+Be^{3x}$ dimana A dan B adalah konstanta. Untuk y_p dipilih $y_p=Cx^2+Dx+E$ dimana C,D dan E adalah konstanta sehingga $y_p{}'=2Cx+D$ dan juga $y_p{}''=2C$. Karena $\frac{d^2y}{dx^2}-5\frac{dy}{dx}+6y=x^2$ atau $y''-5y'+6y=x^2$ maka $y_p{}''-5y_p{}'+6y_p=x^2$ atau $2C-5(2Cx+D)+6(Cx^2+Dx+E)=\ x^2$. Selanjutnya perhitungannya

$$2C-5(2Cx+D)+6(Cx^2+Dx+E)=\ x^2$$
$$2C-10Cx-5D+6Cx^2+6Dx+6E=\ x^2$$
$$6Cx^2-10Cx+6Dx+2C-5D+6E=\ x^2$$
$$6Cx^2+(-10C+6D)x+2C-5D+6E=\ x^2$$

- $6C = 1$

  $C = \frac{1}{6}$
- $-10C + 6D = 0$

  $-10\left(\frac{1}{6}\right) + 6D = 0$

  $-\frac{10}{6} + 6D = 0$

  $6D = \frac{10}{6}$

  $D = \frac{10}{36}$

  $D = \frac{5}{18}$
- $2C - 5D + 6E = 0$

  $2\left(\frac{1}{6}\right) - 5\left(\frac{5}{18}\right) + 6E = 0$

  $\frac{2}{6} - \frac{25}{18} + 6E = 0$

  $\frac{6}{18} - \frac{25}{18} + 6E = 0$

  $-\frac{19}{18} + 6E = 0$

  $6E = \frac{19}{18}$

  $E = \frac{19}{108}$

Sehingga solusi $y_p = Cx^2 + Dx + E = \frac{1}{6}x^2 + \frac{5}{18}x + \frac{19}{108}$. Jadi penyelesaian umum dari persamaan differensial $\frac{d^2y}{dx^2} - 5\frac{dy}{dx} + 6y = x^2$ adalah $y = y_h + y_p = Ae^{2x} + Be^{3x} + \frac{1}{6}x^2 + \frac{5}{18}x + \frac{19}{108}$ dimana A dan B adalah konstanta.

b. $\frac{d^2y}{dx^2} - 3\frac{dy}{dx} + 2y = e^{-x}$

c. $\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{dy}{dx} - 2y = \cos x$

d. $\frac{d^2y}{dx^2} - 3\frac{dy}{dx} - 4y = 3x^2 + 2$

e. $\frac{d^2y}{dx^2} - 9y = x + 2$

f. $\frac{d^2y}{dx^2} + 3\frac{dy}{dx} - 4y = e^{2x}$

g. $\frac{d^2y}{dx^2} - 4y = 2\sin x$

h. $\frac{d^2y}{dx^2} - 5\frac{dy}{dx} + 6y = 2\cos 2x$

2. Tentukan apakah persamaan dfferensial berikut eksak atau bukan:

   a. $x^2y dx + xy^2 dy = 0$

   b. $(x^2 + 2y)dx + (y^2 + 2x)dy = 0$

3. Tentukan solusi umum persamaan differensial eksak

$$(2x + 3y)dx + (2y + 3x)dy = 0 \text{ !}$$

4. Carilah penyelesaian umum dari persamaan differensial linear

$$\frac{dy}{dx} + \frac{y}{x} = 3x\,!$$

5. Carilah penyelesaian umum dari persamaan differensial

$$\frac{d^2y}{dx^2} = x^3 + x^2 + x\,!$$

6. Carilah penyelesaian umum dari persamaan-persamaan differensial berikut:
   a. $\frac{d^2y}{dx^2} - 5\frac{dy}{dx} + 6y = 0$
   b. $\frac{d^2y}{dx^2} - 4\frac{dy}{dx} + 4y = 0$