

TITIK TETAP REICH DI DALAM RUANG b -METRIK

by Ahmad Khairul Umam

Submission date: 30-Jul-2022 08:53AM (UTC-0400)

Submission ID: 1876872562

File name: Jurnal-JMS-Umam_-Krisna-2022-_9.pdf (705.7K)

Word count: 1754

Character count: 7316

TITIK TETAP REICH DI DALAM RUANG b -METRIK

Ahmad Khairul Umam^{1*}, Krisna Adilia Daniswara²,
^{1,2}Program Studi Matematika Universitas Billfath
Corresponding Author: aku.abmad.umam@gmail.com

Abstract

Problem of linear equation, integral equation, and differential equation can be solved with a fixed point. One of generalization of metric space is b -metric space. This article discusses a lemma, a theorem and an example in b -metric space. We discuss a theorem about uniqueness and existence of fixed point.

Keywords: b -Metric Space; Fixed Point

How to cite: Ahmad Khairul Umam & Krisna Adilia Daniswara. (2022). Titik Tetap Reich di Dalam Ruang b -Metrik. *JMS (Jurnal Matematika dan Sains)*, Vol(No), pp.xx.

PENDAHULUAN

Banyak peneliti matematika di bidang analisis yang meneliti tentang topik ruang dan perluasannya. Pada mata kuliah analisis real atau analisis fungsional dibahas tentang ruang metrik. Topik tentang ruang metrik saat ini banyak perluasannya seperti ruang b -metrik, (kerucut) *cone*, parsial, dan lain-lain. Disini dibahas tentang ruang b -metrik yaitu perluasan suatu ruang yaitu ruang metrik. Aksioma ketaksamaan segitiga di ruang b -metrik berbeda dengan aksioma ketaksamaan segitiga di ruang metrik.

Beberapa peneliti, menambahkan syarat ketaksamaan segitiga yang lain di ruang b -metrik dengan koefisien matriks [1], membuktikan suatu teorema berkaitan dengan titik tetap dalam suatu b -metrik menggunakan operator Picard lemah (*weak*) [2], membuktikan perluasan teorema titik tetap Hardy dan Reich di ruang b -metrik [3]. Penelitian ini memberikan bukti contoh 2.1, membuktikan lemma 2.1, dan memberikan penjelasan yang lebih banyak untuk pembuktian di teorema 3.1 (perluasan teorema titik tetap Reich) [3].

Definisi. [4] Diberikan himpunan tidak kosong X dimana $s \geq 1$ merupakan suatu bilangan real. Diberikan juga fungsi $b: X \times X \rightarrow \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$ dikatakan b -metrik apabila untuk setiap $x, y, z \in X$ terpenuhi:

B1. $b(x, y) = 0$ jh $x = y$;

B2. $b(x, y) = b(y, x)$;

B3. $b(x, z) \leq s(b(x, y) + b(y, z))$.

Ruang (X, b) merupakan ruang b -metrik.

HASIL DAN PEMBAHASAN

Teorema 1. [5] Diberikan suatu ruang metrik (X, d) yang lengkap dimana d adalah metrik. Selanjutnya diberikan fungsi $f: X \rightarrow X$ dengan

$$d(f(x), f(y)) \leq \alpha d(x, f(x)) + \beta d(y, f(y)) + \gamma d(x, y) \quad (1)$$

untuk setiap $x, y \in X$ dengan α, β dan γ merupakan bilangan tak negatif sehingga $\alpha + \beta + \gamma < 1$, oleh karena itu fungsi f memiliki titik tetap tunggal.

Lemma. [3] Suatu ruang b -metrik (X, b) dimana $s \geq 1$ dan barisan $\langle u_n \rangle$ di X sedemikian sehingga $b(u_n, u_{n+1}) \leq \delta b(u_{n-1}, u_n)$ untuk $n = 2, 3, \dots$ dimana $0 \leq \delta < 1$ dan $s \cdot \delta < 1$ maka $\langle u_n \rangle$ adalah barisan Cauchy di X .

Bukti

Untuk $n \in \mathbb{N}$ berlaku

$$b(u_n, u_{n+1}) \leq \delta b(u_{n-1}, u_n) \leq \dots \leq \delta^n b(u_0, u_1).$$

Berdasarkan ketaksamaan segitiga di ruang b -metrik, untuk $n < m$ berlaku

$$\begin{aligned} b(u_n, u_m) &\leq s(b(u_n, u_{n+1}) + b(u_{n+1}, u_m)) \\ &= sb(u_n, u_{n+1}) + sb(u_{n+1}, u_m) \\ &\leq sb(u_n, u_{n+1}) + s(s(b(u_{n+1}, u_{n+2}) + b(u_{n+2}, u_m))) \\ &= sb(u_n, u_{n+1}) + s^2b(u_{n+1}, u_{n+2}) + s^2b(u_{n+2}, u_m) \\ &\leq sb(u_n, u_{n+1}) + s^2b(u_{n+1}, u_{n+2}) \\ &\quad + s^3b(u_{n+2}, u_{n+3}) + \dots + s^{m-n-1}b(u_{m-2}, u_{m-1}) \\ &\quad + s^{m-n-1}b(u_{m-1}, u_m) \\ &\leq sb(u_n, u_{n+1}) + s^2b(u_{n+1}, u_{n+2}) \\ &\quad + s^3b(u_{n+2}, u_{n+3}) + \dots + s^{m-n-1}b(u_{m-2}, u_{m-1}) \\ &\quad + s^{m-n}b(u_{m-1}, u_m) \\ &\leq s\delta^n b(u_0, u_1) + s^2\delta^{n+1}b(u_0, u_1) + s^3\delta^{n+2}b(u_0, u_1) + \dots \\ &\quad + s^{m-n-1}\delta^{m-2}b(u_0, u_1) + s^{m-n}\delta^{m-1}b(u_0, u_1) \\ &= s\delta^n(1 + s\delta + \dots + (s\delta)^{m-n-1})b(u_0, u_1) \end{aligned}$$

untuk $n \rightarrow \infty$ berlaku

$$\begin{aligned} b(u_n, u_m) &\leq s\delta^n(1 + s\delta + \dots + (s\delta)^{m-n-1})b(u_0, u_1) \\ &= s\delta^n(1 + s\delta + (s\delta)^2 + \dots)b(u_0, u_1) = \left(\frac{s\delta^n}{1 - s\delta}\right)b(u_0, u_1) = 0. \end{aligned}$$

Jadi barisan $\langle u_n \rangle$ adalah barisan Cauchy.

Contoh. Diberikan ruang $l^p = \{ \langle u_n \rangle \subset \mathbb{R} : \sum_{n=1}^{\infty} |u_n|^p < \infty \}$ untuk $0 < p < 1$ dan fungsi $b: l^p \times l^p \rightarrow \mathbb{R}$ untuk $b(x, z) \leq 2^{\frac{1}{p}}(b(x, y), b(y, z))$ dimana $b(x, y) = (\sum_{n=1}^{\infty} |u_n - v_n|^p)^{\frac{1}{p}}$ dengan $u_n = x, v_n = y, w_n = z \in l^p$. Ruang (l^p, b) merupakan suatu ruang b -metrik.

Bukti

B1. (\Rightarrow) Karena $b(x, y) = (\sum_{n=1}^{\infty} |u_n - v_n|^p)^{\frac{1}{p}} = 0$ untuk $0 < p < 1$ maka $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n - v_n|^p = 0$. Selanjutnya $|u_1 - v_1|^p = 0, |u_2 - v_2|^p = 0, \dots$. Kemudian didapatkan $|u_1 - v_1| = 0, |u_2 - v_2| = 0, \dots$. Oleh karena itu $u_1 = v_1, u_2 = v_2$, dan seterusnya. Jadi $x = \langle u_1, u_2, \dots \rangle = \langle v_1, v_2, \dots \rangle = \langle v_n \rangle = y$.

(\Leftarrow) Diketahui $x = \langle u_1, u_2, \dots \rangle = \langle v_1, v_2, \dots \rangle = \langle v_n \rangle = y$ sehingga $u_1 = v_1, u_2 = v_2$, dan seterusnya. Jadi $b(x, y) = (\sum_{n=1}^{\infty} |u_n - v_n|^p)^{\frac{1}{p}} = (|u_1 - v_1|^p + |u_2 - v_2|^p + \dots)^{\frac{1}{p}} = (|0|^p + |0|^p + \dots)^{\frac{1}{p}} = 0$ untuk $0 < p < 1$.

B2. $b(x, y) = (\sum_{n=1}^{\infty} |u_n - v_n|^p)^{\frac{1}{p}} = (\sum_{n=1}^{\infty} |v_n - u_n|^p)^{\frac{1}{p}} = b(x, y)$ untuk setiap $x = \langle u_n \rangle, y = \langle v_n \rangle \in l^p$ dimana $0 < p < 1$.

B3. Berdasarkan aksioma ruang metrik disebutkan bahwa $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$ atau $b(x, z) \leq t(b(x, y) + b(y, z))$ (2)

dimana $t = 1$. Jelas bahwa jika $t > 1$ pada (2) menjadikan ketaksamaan tersebut juga terpenuhi. Untuk $b(x, z) \leq 2^{\frac{1}{p}}(b(x, y) + b(y, z))$, nilai p mendekati 0 dari kanan berakibat nilai $2^{\frac{1}{p}}$ menjadi ∞ , maka $b(x, z) \leq 2^{\frac{1}{p}}(b(x, y) + b(y, z))$ berlaku. Sedangkan untuk $b(x, y) \leq 2^{\frac{1}{p}}(b(x, y) + b(y, z))$, nilai p mendekati 1 dari kiri berakibat nilai $2^{\frac{1}{p}}$ menjadi 2, sehingga $b(x, z) \leq 2^{\frac{1}{p}}(b(x, y) + b(y, z))$ juga berlaku. Oleh karena itu $b(x, z) \leq 2^{\frac{1}{p}}(b(x, y) + b(y, z))$ dimana $0 < p < 1$.

Teorema 2. Diberikan suatu ruang yaitu b -metrik yang lengkap (X, b) dengan $s \geq 1$ dimana b adalah b -metrik. Selanjutnya diberikan fungsi $f: X \rightarrow X$ dengan

$$b(f(x), f(y)) \leq \alpha b(x, f(x)) + \beta b(y, f(y)) + \gamma b(x, y) \quad (3)$$

dimana setiap $x, y \in X$, bilangan α, β dan γ merupakan bilangan-bilangan tak negatif

Judul (3 kata awal) ...

sehingga $\alpha + s(\beta + \gamma) < 1$ untuk $s \geq 1$, oleh karena itu fungsi f memiliki titik tetap tunggal.

Bukti

Misalkan diambil $u_0 \in X$ kemudian dibangun suatu barisan $\langle u_n \rangle$ di X dengan suku-suku barisan

$$u_0, u_1 = f(u_0), \dots, u_n = f^n(u_0).$$

Berdasarkan (3), Kemudian ditunjukkan barisan $\langle u_n \rangle$ adalah Cauchy.

$$\begin{aligned} b(u_{n+1}, u_n) &= b(f(u_n), f(u_{n-1})) \\ &\leq \alpha b(u_n, f(u_n)) + \beta b(u_{n-1}, f(u_{n-1})) + \gamma b(u_n, u_{n-1}) \\ &= \alpha b(u_n, u_{n+1}) + \beta b(u_{n-1}, u_n) + \gamma b(u_n, u_{n-1}) \end{aligned}$$

bisa ditulis

$$\begin{aligned} b(u_{n+1}, u_n) &\leq \alpha b(u_n, u_{n+1}) + \beta b(u_{n-1}, u_n) + \gamma b(u_n, u_{n-1}) \\ b(u_{n+1}, u_n) - \alpha b(u_n, u_{n+1}) &\leq \beta b(u_{n-1}, u_n) + \gamma b(u_n, u_{n-1}) \\ b(u_n, u_{n+1}) - \alpha b(u_n, u_{n+1}) &\leq \beta b(u_{n-1}, u_n) + \gamma b(u_{n-1}, u_n) \\ b(u_n, u_{n+1})(1 - \alpha) &\leq (\beta + \gamma)b(u_{n-1}, u_n) \\ b(u_n, u_{n+1}) &\leq \frac{\beta + \gamma}{1 - \alpha} \cdot b(u_{n-1}, u_n) \end{aligned}$$

misalkan $\delta = \frac{\beta + \gamma}{1 - \alpha}$, maka

$$b(u_n, u_{n+1}) \leq \left(\frac{\beta + \gamma}{1 - \alpha}\right) b(u_{n-1}, u_n) = \delta b(u_{n-1}, u_n) \leq \dots \leq \delta^n b(u_0, u_1).$$

Berdasarkan ketaksamaan segitiga di ruang b -metrik dan lemma, untuk $n, m > 0$ dan $n < m$ maka barisan $\langle u_n \rangle$ adalah barisan Cauchy.

Karena ruang (X, b) adalah ruang b -metrik yang lengkap maka semua barisan Cauchy di dalam ruang tersebut konvergen, anggap $u_n \rightarrow x$. Selanjutnya ditunjukkan x merupakan titik tetap fungsi f .

$$\begin{aligned} b(x, f(x)) &\leq s (b(x, u_n) + b(u_n, f(x))) \\ &= s (b(x, u_n) + b(f(u_{n-1}), f(x))) \\ &= s (b(x, u_n) + b(f(x), f(u_{n-1}))) \\ &\leq s (b(x, u_n) + \alpha b(x, f(x)) + \beta b(u_{n-1}, f(u_{n-1})) + \gamma b(x, u_{n-1})) \\ &= sb(x, u_n) + s\alpha b(x, f(x)) + s\beta b(u_{n-1}, f(u_{n-1})) + s\gamma b(x, u_{n-1}) \end{aligned}$$

$$= sb(x, u_n) + sab(x, f(x)) + s\beta b(u_{n-1}, u_n) + s\gamma b(x, u_{n-1})$$

bisa ditulis

$$b(x, f(x)) \leq sb(x, u_n) + sab(x, f(x)) + s\beta b(u_{n-1}, u_n) + s\gamma b(x, u_{n-1})$$

$$b(x, f(x)) - sab(x, f(x)) \leq sb(x, u_n) + s\beta b(u_{n-1}, u_n) + s\gamma b(x, u_{n-1})$$

$$b(x, f(x))(1 - s\alpha) \leq s(b(x, u_n) + \beta b(u_{n-1}, u_n) + \gamma b(x, u_{n-1}))$$

$$b(x, f(x)) \leq \frac{s}{1 - s\alpha} \cdot (b(x, u_n) + \beta b(u_{n-1}, u_n) + \gamma b(x, u_{n-1}))$$

untuk $n \rightarrow \infty$ berlaku

$$b(x, f(x)) \leq \left(\frac{s}{1 - s\alpha}\right) (b(x, u_n) + \beta b(u_{n-1}, u_n) + \gamma b(x, u_{n-1}))$$

$$b(x, f(x)) = 0$$

sehingga titik x disebut titik tetap.

Misalkan x dan y merupakan titik tetap dimana $f(x) = x$ dan $f(y) = y$, jadi

$$\begin{aligned} b(x, y) &= b(f(x), f(y)) \leq \alpha b(x, f(x)) + \beta b(y, f(y)) + \gamma b(x, y) \\ &= \alpha b(x, x) + \beta b(y, y) + \gamma b(x, y) = \gamma b(x, y) \end{aligned}$$

karena γ merupakan bilangan tak negatif maka hal tersebut kontradiktif, jadi terbukti fungsi f mempunyai titik tetap tunggal.

SIMPULAN DAN SARAN

Suatu fungsi f dimana $f: X \rightarrow X$ akan mempunyai titik tetap, juga titik tetapnya tunggal pada ruang metrik jika memenuhi persamaan (1) dengan $\alpha + \beta + \gamma < 1$, sedangkan di ruang b -metrik dengan memenuhi $\alpha + s(\beta + \gamma) < 1$. Saran untuk penelitian selanjutnya menerapkan teorema titik tetap di ruang b -metrik guna mencari solusi dari persamaan differensial, persamaan linear, dan persamaan integral.

DAFTAR RUJUKAN

- [1] Boriceanu, M. (2009). Fixed Point Theory on Spaces with Vector-Valued b Metrics. *Demonstratio Mathematica*, 42(4), 825-835.
- [2] Petre, R. I. & Bota, M. (2013). Fixed Point Theorems on Generalized b -Metric Spaces. *Publ. Math. Debrecen*, 83 (1-2), 139-159.
- [3] Mishra, P. K., Sachdeva, S., & Banerjee, S. K. (2014). Some Fixed Point Theorems in b -

Judul (3 kata awal) ...

Metric Spaces. *Turkish Journal of Analysis and Number Theory*, 2(1), 19-22.

[4] Agrawal, S., Qureshi, K., & Nema, J. (2016). A Fixed Point Theorem for b -Metric Space.

International Journal of Pure and Applied Mathematical Sciences, 9(1), 45-50.

[5] Reich, S. (1971). Some Remarks Concerning Contraction Mappings. *Canad. Math. Bull.*, 14(1), 121-124.

NB: aku.ahmad.umam@gmail.com, krisnaadiliadaniswara@gmail.com

TITIK TETAP REICH DI DALAM RUANG b-METRIK

ORIGINALITY REPORT

24%

SIMILARITY INDEX

6%

INTERNET SOURCES

21%

PUBLICATIONS

8%

STUDENT PAPERS

PRIMARY SOURCES

- 1 N. Mansouri, R. Vemuri. "Accounting for various register allocation schemes during post-synthesis verification of RTL designs", Design, Automation and Test in Europe Conference and Exhibition, 1999. Proceedings (Cat. No. PR00078), 1999 4%
Publication
- 2 Wei-hong Bi. "Convergence analysis for the Secant method based on new recurrence relations", Applied Mathematics-A Journal of Chinese Universities, 12/2008 3%
Publication
- 3 ejournal.billfath.ac.id 3%
Internet Source
- 4 Submitted to Universidad Carlos III de Madrid 2%
Student Paper
- 5 ojs3.unpatti.ac.id 2%
Internet Source
- 6 G. S. Smith. "Crystal structure of Sm₅Ge₄", Acta Crystallographica, 2/10/1967 1%
Publication

-
- 7 Ryszard Kowalczyk. "Predicting partner's behaviour in agent negotiation", Proceedings of the fifth international joint conference on Autonomous agents and multiagent systems - AAMAS 06 AAMAS 06, 2006 1 %
Publication
-
- 8 Hamazaki, T.. "Evolution of cosmological perturbations in the universe dominated by resonant scalar fields", Nuclear Physics, Section B, 20041018 1 %
Publication
-
- 9 "Advanced Computing in Industrial Mathematics", Springer Science and Business Media LLC, 2021 1 %
Publication
-
- 10 Andrey Zahariev, Atanaska Georgieva, Lozanka Trenkova. "On Volterra-type integral equations in noncompact metric space", Journal of Inequalities and Applications, 2014 1 %
Publication
-
- 11 Zikopoulos, C.. "Impact of uncertainty in the quality of returns on the profitability of a single-period refurbishing operation", European Journal of Operational Research, 20071001 1 %
Publication
-

12 Per Miller. "Glacial and palaeoenvironmental history of the Cape Chelyuskin area, Arctic Russia", *Polar Research*, 08/2008 1 %
Publication

13 Breed, Gert. "'n Begronde bedieningsmodel vir die diakonia van die gemeente", *HTS Teologiese Studies / Theological Studies*, 2012. 1 %
Publication

14 Changjiang Sun, Yudong Mou, Jianwen Zhang, Miao Zhu, Xu Cai. "Cell voltage balancing control of isolated modular multilevel using inter-submodule phase-shift modulation scheme", 2016 IEEE 11th Conference on Industrial Electronics and Applications (ICIEA), 2016 1 %
Publication

15 Gunter, S.. "Off-line cursive handwriting recognition using multiple classifier systems-on the influence of vocabulary, ensemble, and training set size", *Optics and Lasers in Engineering*, 200503/05 1 %
Publication

16 Liang Dou, Qiang Liu, Zongyuan Yang, Jinkui Xie. "A Situation Calculus-based semantic framework for UML", 2012 International Conference on Communications and Information Technology (ICCIT), 2012 1 %

17

Shao Jie Zhang, Yang Liu. "An Automatic Approach to Model Checking UML State Machines", 2010 Fourth International Conference on Secure Software Integration and Reliability Improvement Companion, 2010

Publication

<1 %

18

"Fontes Historiae Iuris Gentium, Band 3/Teil 2, 1815 - 1945", Walter de Gruyter GmbH, 1992

Publication

<1 %

Exclude quotes Off

Exclude matches Off

Exclude bibliography On